代表的な計算モデル

- 有限オートマトン（有限状態機械）
- プッシュダウンオートマトン
- チューリングマシン

有限オートマトンの形式的定義

$$M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$$

ここに、

- Q **: 有限集合** $\cdots$ **状態の集合**
- Σ **: 有限集合** $\cdots$ **入力文字の集合 :"alphabet"**
- $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ **: 遷移関数**
- $s \in Q$ $\cdots$ **初期状態**
- $F \subset Q$ $\cdots$ **受理状態の集合**

語・言語

Σ : **入力文字の有限集合** $\cdots$ **alphabet**

入力は Σ **の元の有限列（語, word）**

$$w = a_1 a_2 \cdots a_n \ (a_i \in \Sigma)$$

その全体 Σ^*

$$\Sigma^* := \bigsqcup_{n=0}^{\infty} \Sigma^n \qquad (\Sigma^0 = \{\varepsilon\} : \text{空列})$$

言語 (language) : Σ^* **の部分集合**

言語 $A \subset \Sigma^*$ **に属する語** $w \in A$

$\cdots$ **言語** A **に於いて "文法に適っている"**

有限オートマトンによる語の受理

有限オートマトン $M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ **が**
語 $w = a_1 a_2 \cdots a_n \in \Sigma^*$ **を受理 (accept) する**

$$\Updownarrow$$

$\exists r_0, r_1, \ldots, r_n \in Q$:

- $r_0 = s$
- $\delta(r_{i-1}, a_i) = r_i$ **(**$i = 1, \ldots, n$**)**
- $r_n \in F$

$L(M)$: M **が受理する語の全体** $\subset \Sigma^*$
$\cdots$ M **が認識 (recognize) する言語**

M **は言語** $L(M)$ **の "文法" で、**
M **が受理する語は "文法に適っている"**

有限オートマトンでの計算可能性問題

- 言語 $A \subset \Sigma^*$ に対し、
  A を認識する有限オートマトン M
  が存在するか？

- 有限オートマトンによって
  認識可能な言語はどのようなものか？

$\longrightarrow$ **正規言語・正規表現**

語の演算

語 $v = a_1 \cdots a_k, w = b_1 \cdots b_l \in \Sigma^*$ **に対し**

$$vw := a_1 \cdots a_k b_1 \cdots b_l$$

： 連結・連接 (concatnation)

連接演算により Σ^* **は単位的自由半群を成す**

$$S = (S, \cdot)$$ **： 半群 (semigroup)**

$$\Updownarrow$$

$\cdot : S \times S \longrightarrow S$ **： 二項演算で結合律を満たす**

正規演算

言語 $A, B \subset \Sigma^*$ **に対し、**

- $A \cup B := \{w | w \in A$ **または** $w \in B\}$
  ： 和集合演算
- $AB = A \circ B := \{vw | v \in A, w \in B\}$
  ： 連結（連接）演算
- $A^* := \{w_1 w_2 \cdots w_n | n \geq 0, w_i \in A\}$
  ： star 演算

（言語全体の集合 $\mathcal{P}(\Sigma^*)$ **上の演算）**

正規表現 (regular expression)

- **空集合記号 $\emptyset$ は正規表現**
- **空列記号 ε は正規表現**
- **各文字 $a \in \Sigma$ は正規表現**
- **正規表現 R, S に対し**
  $(R \cup S)$ **は正規表現（**$(R|S)$ **とも書く）**
- **正規表現 R, S に対し**
  $(R \circ S)$ **は正規表現（**(RS) **とも書く）**
- **正規表現 R に対し R^* は正規表現**
- **以上のものだけが正規表現**

$\cdots$ **帰納的導出による定義**

正規言語 (regular language)

正規表現 R に対し、言語 $L(R)$ を次で定める：

- $L(\emptyset) = \emptyset$
- $L(\varepsilon) = \{\varepsilon\}$
- $L(a) = \{a\}$ **(**$a \in \Sigma$**)**
- $L(R \cup S) = L(R) \cup L(S)$
- $L(R \circ S) = L(R) \circ L(S)$
- $L(R^*) = L(R)^*$

正規表現で表される言語 $\cdots$ **正規言語**

定理：

L：**正規言語**

$\Updownarrow$

L **が或る有限オートマトンで認識される**

このような一般論を考えるには、
有限オートマトンの概念を
少し一般化する方が良い

$\cdots$ 非決定性有限オートマトン
(Non-deterministic finite automaton)

定理：

$$\mathrm{L}$$：正規言語

$$\Updownarrow$$

L が或る有限オートマトンで認識される

このような一般論を考えるには、
有限オートマトンの概念を
少し一般化する方が良い

$\cdots$ **非決定性**有限オートマトン
(Non-deterministic finite automaton)

その説明の前に、今回は、

ここで現れる色々な概念を

集合・写像などの言葉を用いて記述する練習

（演習問題）

演習問題：Σ を alphabet とする。以下を記述せよ。

(1) L：言語

(a) 文字 $a \in \Sigma$ に対し、語に左（resp. 右）から文字 a を連接させる写像 ℓ_a (resp. r_a)

(b) 語 $w \in \Sigma^*$ に対し、語に左（resp. 右）から文字列 w を連接させる写像 ℓ_w (resp. r_w)（語の長さ $|w|$ に関する帰納的定義で）

(c) 語 $w \in \Sigma^*$ の後に連接すると L の元になる語全体の成す集合 $S_{\mathrm{L}}(w)$ を与える写像 S_{L}

(2) $M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ **: 有限オートマトン**

(a) **状態** $q \in Q$ **にいる所から出発して語** $w \in \Sigma^*$ **を読んだ後の状態** $\widetilde{\delta}(q, w)$ **を与える写像** $\widetilde{\delta}$ **(語の長さ** $|w|$ **に関する帰納的定義で)**

(b) **特に、**M **が語** $w \in \Sigma^*$ **を読んだ後の状態を与える写像** $\widetilde{\delta}_0$

(c) M **が認識する言語** $L(M)$

(d) **より一般に、語** $w \in \Sigma^*$ **を読んだ後に、続けて読めば受理される語全体の成す集合** $S_M(w)$ **を与える写像** S_M

「非決定性」とは　　$\cdots$ あてずっぽう有り

状態の遷移先を一意に決めない
（幾つかあって分岐していく）

$\longrightarrow$ どれかが受理すれば OK!!

- 手分けをして誰かが受理出来れば良い
- どの道を辿れば良いか知っていて、
受理が検証出来れば良い

と考えることも出来る

非決定性有限オートマトンの形式的定義

$$M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$$

ここに、

- Q **: 有限集合** $\cdots$ **状態の集合**
- Σ **: 有限集合** $\cdots$ **alphabet,** $\Sigma_\varepsilon := \Sigma \cup \{\varepsilon\}$
- $\delta : Q \times \Sigma_\varepsilon \to \mathcal{P}(Q)$ **: 遷移関数**
  $\cdots$ **可能な遷移先全体の集合を与える**
- $s \in Q$ $\cdots$ **初期状態**
- $F \subset Q$ $\cdots$ **受理状態の集合**

非決定性有限オートマトンによる語の受理

非決定性有限オートマトン

$$M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$$

が、語 $w \in \Sigma^*$ を**受理**する

$$\Updownarrow$$

$\exists a_1, a_2, \cdots, a_n \in \Sigma_\varepsilon : w = a_1 a_2 \cdots a_n$

$\exists r_0, r_1, \ldots, r_n \in Q :$

- $r_0 = s$
- $r_i \in \delta(r_{i-1}, a_i)$ **(**$i = 1, \ldots, n$**)**
- $r_n \in F$

$L(M)$ **:** M **が受理する語の全体**

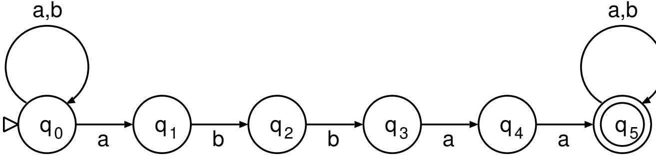
$\cdots$ M **が認識する言語**

非決定性有限オートマトンによる語の受理

- $r_i \in \delta(r_{i-1}, \varepsilon)$ とは、
  「入力を読まずに
  状態 r_{i-1} から状態 r_i に移って良い」
  ということ

- $\delta(r_{i-1}, a_i) = \emptyset$ （矢印が出ていない）
  ということもある
  $\longrightarrow$ 受理されない分岐の
  行き止まりに入ってしまった
  $\longrightarrow$ 他の分岐が生きていれば問題無し

非決定性有限オートマトンの例（状態遷移図による表示）



定理：

L：**正規言語**

$\Updownarrow$

L **が或る非決定性有限オートマトンで認識される**

これは比較的容易

正規言語の帰納的定義に沿って構成

定理：

L：**正規言語**

$\Updownarrow$

L **が或る非決定性有限オートマトンで認識される**

これは比較的容易

正規言語の帰納的定義に沿って構成

正規言語を認識する NFA の構成

正規言語：

- $L(\emptyset) = \emptyset$
- $L(\varepsilon) = \{\varepsilon\}$
- $L(a) = \{a\}$
- $L(R \cup S) = L(R) \cup L(S)$
- $L(R \circ S) = L(R) \circ L(S)$
- $L(R^*) = L(R)^*$

(1) 言語 $L(\emptyset), L(\varepsilon), L(a)$ **を認識する NFA を構成**

(2) 言語 A, B **を認識する NFA から、**
言語 $A \cup B, A \circ B, A^*$ **を認識する NFA を構成**

$A \cup B$ を認識する非決定性有限オートマトンの構成