有限オートマトンでの計算可能性問題

- 言語 $A \subset \Sigma^*$ に対し、
  A を認識する有限オートマトン M
  が存在するか？

- 有限オートマトンによって
  認識可能な言語はどのようなものか？

定理：

L：正規言語

$\Updownarrow$

L が或る有限オートマトンで認識される

定理：

L： **正規言語**

$\Updownarrow$

L **が或る有限オートマトンで認識される**

このような一般論を考えるには、
有限オートマトンの概念を
少し一般化する方が良い

$\cdots$ **非決定性有限オートマトン**
(Non-deterministic finite automaton)

定理：

L：正規言語

$\Updownarrow$

L が或る非決定性有限オートマトンで認識される

これは比較的容易

正規言語の帰納的定義に沿って構成

正規言語を認識する NFA の構成

正規言語：

- $L(\emptyset) = \emptyset$
- $L(\varepsilon) = \{\varepsilon\}$
- $L(a) = \{a\}$
- $L(R \cup S) = L(R) \cup L(S)$
- $L(R \circ S) = L(R) \circ L(S)$
- $L(R^*) = L(R)^*$

(1) 言語 $L(\emptyset), L(\varepsilon), L(a)$ を認識する NFA を構成
(2) 言語 A, B を認識する NFA から、
言語 $A \cup B, A \circ B, A^*$ を認識する NFA を構成

DFA と NFA との同等性

> **定理：**
> L が或る（決定性）有限オートマトンで認識される
>
> $\Updownarrow$
>
> L が或る非決定性有限オートマトンで認識される

非決定性有限オートマトン M に対し、

$\mathrm{L}(\mathrm{M})$ を認識する決定性有限オートマトン $\widetilde{\mathrm{M}}$ が構成できる

DFA と NFA との同等性

非決定性有限オートマトン

$$M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$$ **に対し、**

$L(M)$ **を認識する決定性有限オートマトン**

$$\widetilde{M} = (\widetilde{Q}, \Sigma, \widetilde{\delta}, \widetilde{s}, \widetilde{F})$$ **を構成**

アイデア：

非決定性モデルでも決定的に定まるものは何か？

DFA と NFA との同等性

定理：

L： **正規言語**

$\Updownarrow$

L **が或る（決定性）有限オートマトンで認識される**

$\Updownarrow$

L **が或る（非決定性）有限オートマトンで認識される**

有限オートマトンでの計算可能性問題

- 言語 $A \subset \Sigma^*$ に対し、
  A を認識する有限オートマトン M
  が存在するか？

- 有限オートマトンによって
  認識可能な言語はどのようなものか？

$\longrightarrow$ 正規言語・正規表現

非決定性有限オートマトンで認識できない
言語が存在する!!
（$\Longleftrightarrow$ 正規でない言語が存在する）

有限オートマトンでの計算可能性問題

- 言語 $A \subset \Sigma^*$ に対し、
  A を認識する有限オートマトン M
  が存在するか？

- 有限オートマトンによって
  認識可能な言語はどのようなものか？

$\longrightarrow$ 正規言語・正規表現

非決定性有限オートマトンで認識でき**ない**
言語が存在する!!
（$\Longleftrightarrow$ 正規でない言語が存在する）

有限オートマトンでの計算可能性問題

有限オートマトンで認識できる

$$\Longleftrightarrow$$ **"待ち" が有限種類**

$$\ell_w : \Sigma^* \longrightarrow \Sigma^* \quad : \textbf{"左平行移動"}$$

$$v \longmapsto wv$$

言語 $L \in \mathcal{P}(\Sigma^*)$ **に対し、**

$$S_L : \Sigma^* \longrightarrow \mathcal{P}(\Sigma^*) \qquad : \textbf{"待ち" の集合}$$

$$w \longmapsto \{v \in \Sigma^* \,|\, wv \in L\} = \ell_w^{-1}(L)$$

$$\#\mathrm{Im} S_L < \infty \Longleftrightarrow \exists M : L = L(M)$$

有限オートマトンでの計算可能性問題

非決定性有限オートマトンで認識できない

言語が存在する!!

（$\Longleftrightarrow$ 正規でない言語が存在する）

例：$A = \{a^n b^n | n \geq 0\}$ （a と b との個数が同じ）
実際 $w_n = a^n b$ に対する $S_L(w_n)$ が全て異なる

一般には、証明には部屋割り論法

（の一種の pumping lemma）

を利用することが多い

有限オートマトンでの計算可能性問題

非決定性有限オートマトンで認識できない言語が存在する!!

($\Longleftrightarrow$ 正規でない言語が存在する)

例: $A = \{a^n b^n | n \geq 0\}$ (a と b との個数が同じ)

実際 $w_n = a^n b$ に対する $S_L(w_n)$ が全て異なる

一般には、証明には部屋割り論法(の一種の pumping lemma)を利用することが多い

有限オートマトンでの計算可能性問題

非決定性有限オートマトンで認識できない
言語が存在する!!
（$\Longleftrightarrow$ 正規でない言語が存在する）

例： $A = \{a^n b^n | n \geq 0\}$ **（a と b との個数が同じ）**
実際 $w_n = a^n b$ **に対する** $S_L(w_n)$ **が全て異なる**

一般には、証明には部屋割り論法
（の一種の pumping lemma）
を利用することが多い

有限オートマトンでの計算可能性問題

非決定性有限オートマトンで認識できない
言語が存在する!!
（$\Longleftrightarrow$ 正規でない言語が存在する）

例： $A = \{a^n b^n | n \geq 0\}$ **（**a **と** b **との個数が同じ）**
実際 $w_n = a^n b$ **に対する** $S_L(w_n)$ **が全て異なる**

一般には、証明には部屋割り論法
（の一種の pumping lemma）
を利用することが多い