

## 授業アンケート実施「教員独自の設問」

- (1) 情報理工学科の他の科目との連携は  
適切だったと思いますか  
(5 : 独立し過ぎ ← 適切 → 重複し過ぎ : 1)
- (2) 情報理工学科の学科専門科目として  
適切な内容だったと思いますか  
(5 : 専門的過ぎ ← 適切 → 概論的過ぎ : 1)
- (3) 情報理工学科の教職課程（教科「数学」）の  
コンピュータ区分の科目として  
適切な内容だったと思いますか  
(5 : 専門的過ぎ ← 適切 → 概論的過ぎ : 1)

## 期末試験のお知らせ

7月27日（月）11:00 ~ 12:00  
（60分試験）

3-222 教室（四谷キャンパス）

- 今日 (7/20) の講義内容まで
- 学生証必携

## レポート提出について

- 期日：**8月7日（金）20時頃まで**
- 内容：  
配布プリントのレポート問題の例のような内容  
及び授業に関連する内容で、  
授業内容の理解または発展的な取組みを  
アピールできるようなもの
- 提出方法：
  - ★ 市谷本館 106 室前のメールポスト
  - ★ 電子メール

本講義最後の話題は、

## 計算量

について

問題の難しさを如何に計るか？

## Church-Turing の提唱

「全てのアルゴリズム（計算手順）は、  
チューリングマシンで実装できる」

（アルゴリズムと呼べるのは  
チューリングマシンで実装できるものだけ）

… 「アルゴリズム」の定式化

## 計算量 (complexity)

- **時間計算量** : 計算に掛かるステップ数  
( TM での計算の遷移の回数 )
- **空間計算量** : 計算に必要なメモリ量  
( TM での計算で使うテープの区画数 )

通常は、決まった桁数の四則演算 1 回を  
1 ステップと数えることが多い

入力データ長  $n$  に対する  
増加のオーダー ( Landau の  $O$ -記号 ) で表す

## 計算量 (complexity)

問題を解くアルゴリズムによって決まる

… アルゴリズムの計算量

→ アルゴリズムの効率 の評価

問題の計算量：

その問題を解くアルゴリズムの計算量の下限

最も効率良く解くと、どれ位で解けるか

= どうしてもどれ位必要か

= どれ位難しい問題か

→ 問題の難しさ の評価

## 重要な難しさのクラス

多項式時間  $P \dots \exists k : O(n^k)$

- “事実上計算可能” な難しさ
- 計算モデルの変更に関して頑健  
(複数テープ TM などに変更しても不変)

「しらみつぶし」が入ると大体  $O(2^n)$  程度以上  
(指数時間  $EXP \dots \exists k : O(2^{n^k})$ )  
“事実上計算不可能”



## 非決定性計算モデルでの計算量

計算量にも“非決定性”の概念がある

あてずっぽうを許して、

うまくいけばどの位で解けるか  
= 答を知って、その検証にどの位かかるか

非決定性多項式時間 (NP) :

非決定性の計算モデルで多項式時間で解ける

例：素因数分解は NP

… 素因数を知っていれば割算するだけ

## 非決定性計算モデルでの計算量

計算量にも“非決定性”の概念がある

あてずっぽうを許して、

うまくいけばどの位で解けるか  
= 答を知って、その検証にどの位かかるか

**非決定性多項式時間 (NP) :**

非決定性の計算モデルで多項式時間で解ける

例：素因数分解は NP

… 素因数を知っていれば割算するだけ

## 非決定性計算モデルでの計算量

計算量にも“非決定性”の概念がある

あてずっぽうを許して、

うまくいけばどの位で解けるか  
= 答を知って、その検証にどの位かかるか

**非決定性多項式時間 (NP) :**

非決定性の計算モデルで多項式時間で解ける

例：素因数分解は **NP**

… 素因数を知っていれば割算するだけ

# 非決定性計算モデルでの計算量

$$P \subset NP \subset EXP$$

未解決問題 (P vs NP Problem)

$$P = NP$$

であるか否か？

“The Millennium Problems”

の 7 つの問題のうちの 1 つ  
(賞金 \$1M)

## 非決定性計算モデルでの計算量

$$P \subset NP \subset EXP$$

未解決問題 (P vs NP Problem)

$$P = NP$$

であるか否か？

“The Millennium Problems”

の 7 つの問題のうちの 1 つ  
(賞金 \$1M)

## 非決定性計算モデルでの計算量

$$P \subset NP \subset EXP$$

未解決問題 (P vs NP Problem)

$$P = NP$$

であるか否か？

“The Millennium Problems”

の 7 つの問題のうちの 1 つ  
(賞金 \$1M)

## 参考 : The Millennium Problems

2000 年に Clay 数学研究所 (CMI) により  
賞金 \$1M が懸けられた 7 つの問題

- Birch and Swinnerton-Dyer 予想
- Hodge 予想
- Navier-Stokes 方程式の解の存在と微分可能性
- P vs NP 予想
- Poincarè 予想 ( Perelman により解決 (2003) )
- Riemann 予想
- Yang-Mills 方程式と質量ギャップ問題

## 多項式時間帰着可能性

問題 B が問題 A に多項式時間帰着可能

$\iff \exists f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^* :$

- $f$  : 多項式時間で計算可能  
(多項式時間で計算する TM が存在)
- $w \in B \iff f(w) \in A$   
(つまり、 $B = f^{-1}(A)$ )

- 問題 B が問題 A に多項式時間帰着可能のとき、  
 $A \in P \implies B \in P$



## 多項式時間帰着可能性

問題 **B** が問題 **A** に多項式時間帰着可能

$\iff \exists f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^* :$

- $f$  : 多項式時間で計算可能  
(多項式時間で計算する TM が存在)
- $w \in B \iff f(w) \in A$   
(つまり、 $B = f^{-1}(A)$ )

- 問題 **B** が問題 **A** に多項式時間帰着可能のとき、  
 $A \in P \implies B \in P$

## NP 完全・NP 困難

- 問題 A が **NP 困難 (NP-hard)**  
 $\iff$  全ての NP 問題 B が  
問題 A に多項式時間帰着可能
- 問題 A が **NP 完全 (NP-complete)**  
 $\iff$  問題 A が NP かつ NP 困難

或る NP 完全な問題 A が  $P \iff P = NP$

## NP 完全・NP 困難

- 問題 A が **NP 困難 (NP-hard)**  
 $\iff$  全ての NP 問題 B が  
問題 A に多項式時間帰着可能
- 問題 A が **NP 完全 (NP-complete)**  
 $\iff$  問題 A が NP かつ NP 困難

或る NP 完全な問題 A が  $P \iff P = NP$

## 充足可能性問題 (SAT)

NOT, OR, AND からなる論理式

$f(A_1, \dots, A_n)$  に対し、  
 $f(a_1, \dots, a_n) = 1$  となる変数  $A_i$  の真理値の組  
 $(a_1, \dots, a_n) \in \{0, 1\}^n$   
が存在するか？

定理 (Cook-Levin)

SAT は NP 完全

## 充足可能性問題 (SAT)

NOT, OR, AND からなる論理式

$f(A_1, \dots, A_n)$  に対し、  
 $f(a_1, \dots, a_n) = 1$  となる変数  $A_i$  の真理値の組  
 $(a_1, \dots, a_n) \in \{0, 1\}^n$   
が存在するか？

定理 (Cook-Levin)

**SAT は NP 完全**

## 論理積標準形

NOT, OR, AND からなる全ての論理式は  
次の形で表せる :

$$f(A_1, \dots, A_n) = (X_{11} \vee \dots \vee X_{1t_1}) \\ \wedge \dots \\ \wedge (X_{s1} \vee \dots \vee X_{st_s})$$

(各  $X_{ij}$  は  $A_k$  または  $\neg A_k$ )

... **論理積標準形** ・ **連言標準形**  
(**conjunctive normal form, CNF**)

特に、 $\forall i : t_i = 3$  となる論理式 ... **3-CNF**

### 3-充足可能性問題 (3-SAT)

3-CNF  $f(A_1, \dots, A_n)$  に対し、  
 $f(a_1, \dots, a_n) = 1$  となる変数  $A_i$  の真理値の組  
 $(a_1, \dots, a_n) \in \{0, 1\}^n$   
が存在するか？

#### 定理

- SAT は 3-SAT に多項式時間帰着可能
- 従って、3-SAT も NP 完全

## 3-充足可能性問題 (3-SAT)

3-CNF  $f(A_1, \dots, A_n)$  に対し、  
 $f(a_1, \dots, a_n) = 1$  となる変数  $A_i$  の真理値の組  
 $(a_1, \dots, a_n) \in \{0, 1\}^n$   
が存在するか？

### 定理

- **SAT** は 3-**SAT** に多項式時間帰着可能
- 従って、3-**SAT** も **NP** 完全



他にも沢山の **NP 完全問題**が知られている

例えば、次のパズルの解の存在判定は全て **NP 完全**

- 数独
- カックロ
- ののぐらむ
- スリザーリンク
- ナンバーリンク
- ぬりかべ
- 美術館
- ましゅ
- 天体ショー
- フィルオミノ

など

おしまい