2015 年度秋期

数の世界

（担当： 角皆）

情報技術と数理の利用

コンピュータの発展・情報化社会の進展に伴い、

数理の解明とその利用が
ますます社会と密接になってきた

数理技術

情報技術と数理の利用

物理技術（17 世紀以来）：

基礎数理 $\underset{\text{理論的裏付け}}{\Longrightarrow}$ 物理現象 $\underset{\text{仕組みの構成}}{\Longrightarrow}$ 実用技術

情報技術（20 世紀以来）：

数理現象 $\underset{\text{仕組みの構成}}{\Longrightarrow}$ 数理技術 $\underset{\text{物理的実現}}{\Longrightarrow}$ 実用技術

数理の解明が直接に技術発展に繋がる

計算機で扱えるもの

計算機では本質的に

有限・離散

のものしか扱えない

- 無限・連続のものの近似
- 有限・離散であることの積極的活用

有限の算術（剰余系）

m：1以上の整数を一つ取って固定

mで割った余りのみに注目して計算する

aとbとが mを法として合同
(congruent modulo m)

$$a \equiv b \pmod{m}$$

$\overset{\leftarrow}{\Longleftrightarrow}$ aとbとをmで割った余りが等しい

$\Longleftrightarrow$ $m \mid (a-b)$（$a-b$がmで割切れる）

有限の算術（剰余系）

剰余のみに着目して（well-defined に）足し算・掛け算が出来る

足し算表は
ほぼ当たり前
右表は $m = 5$

$$3 + 4 = 7 \equiv 2 \pmod{5}$$

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

実習：剰余系の掛け算

$\mathrm{m} = 3, 4, 5, 6, 7$ について、

演習プリントの掛け算表を埋めてみよう

掛け算表は
当たり前？
右表は $\mathrm{m} = 5$

$$2 \times 3 = 6 \equiv 1 \pmod{5}$$

×	0	1	2	3	4
0	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
1	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
2	**0**	**2**	**4**	**1**	**3**
3	**0**	**3**	**1**	**4**	**2**
4	**0**	**4**	**3**	**2**	**1**

（演習プリントの表には 0 の行・列はない）

実習：剰余系の掛け算

$m = 3, 4, 5, 6, 7$ **について、**

演習プリントの掛け算表を埋めてみよう

m **の値による様子の違いは？**

剰余系の演算

$\mathrm{mod}\ m$ で考えたとき、a, b に対して、

$a + x \equiv b \pmod{m}$ となる x は
必ず丁度 1 つ見付かる

$\longrightarrow$ $\mathrm{mod}\ m$ で引き算が出来る
$\mathrm{mod}\ m$ の世界で“$x = b - a$”

しかし、

$ax \equiv b \pmod{m}$ となる x は
（$a \not\equiv 0 \pmod{m}$ でも）見付かるとは限らない

$\longrightarrow$ $\mathrm{mod}\ m$ で割り算が出来るとは限らない

素数を法とする剰余系の演算

一般の m では
$\mathrm{mod}\ m$ で割り算が出来るとは限らないが、

法 m が素数 p であるときは、

$a \not\equiv 0 \pmod{p}$ であれば、

$ax \equiv b \pmod{p}$ となる x は
必ず丁度 1 つ見付かる

$\longrightarrow$ $\mathrm{mod}\ p$ で（0 以外での）割り算も出来る
$\mathrm{mod}\ p$ の世界で“$x = b/a$”

有限体

体 (field)：四則演算（加減乗除）が出来る集合

例：有理数体 $\mathbb{Q}$ **・実数体** $\mathbb{R}$ **・複素数体** $\mathbb{C}$

素数 p **に対して、**

p **で割った余りの集合** $\xleftrightarrow{1:1} \{0, 1, \ldots, p-1\}$

この中で（0 **で割る以外の）四則演算が出来る**

$\cdots$ **有限体 (finite field)・**p **元体** $\mathbb{F}_p$, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

有限体

体 (field)：四則演算（加減乗除）が出来る集合

$\longrightarrow$ 四則演算しか使わない計算なら、
有限体 $\mathbb{F}_p$ 上でも
実数や複素数と同様に行なえる

例：連立１次方程式を解く

大小関係・極限・収束などはない

物理技術の利用においては、

微分積分（解析学）がその基礎となったが、

有限・離散な世界である計算機上の
情報・数理技術の利用においては、

抽象代数学がその基礎となっている

- **基礎理学はすぐには役に立たない**
- **けれども不思議といつか役に立つ**
- **それがいつかは判らない**

⟶ “良いもの” を追い求めるのが大切

数理技術としての応用例 1

有限体の算術を利用した、
ちょっと不思議な応用例を紹介しよう

秘密分散

（秘密情報の安全な管理の一方法）

秘密分散

盗賊の親分が隠し財宝の在処を子分達に伝える
（会社の社長が超重要機密を重役達に伝える）

伝える相手は3**人**

それぞれに異なる手掛かりを教える

但し、

- **どの**1**人も自分だけでは何も判らない**
- **どの**2**人でも教え合えば判る**

ようにするにはどうしたら良いか？

秘密分散

アナログ技術で実現するのは中々難しそうだ

$\longrightarrow$ **ディジタル技術・数理技術の利用**

$\longrightarrow$ **秘密情報を数値化・符号化して処理**
（有限・離散の世界の積極的活用）

秘密分散

駄目な例 1： 秘密情報を 3 桁の数字列として各人に 1 桁づつ教える

- 2 人がつるんでも判らない
- 各人は何も知らないよりも情報がある

駄目な例 2： 秘密情報を 3 桁の数字列として各人に 2 桁づつ教える

- 2 人がつるめば判るが、
- 各人は何も知らないよりも情報がある

秘密分散

- 素数 p を固定（これは公開）
- 秘密情報は有限体 $\mathbb{F}_p$ の元 b とする
- ランダムに $\mathbb{F}_p$ の元 a を選ぶ（これも秘密）
- $\mathbb{F}_p$ 上の “直線” $y = ax + b$ を考える
- 各子分に対して
  - ⋆ 異なる $\mathbb{F}_p$ の元 $x_i (\neq 0)$ を選び

    $y_i = ax_i + b$ を計算する
  - ⋆ “直線上の点” (x_i, y_i) を教える

秘密分散

2 人つるむと判る理由：

2 **点を通る "直線"** $y = ax + b$ **は唯一に定まる**

2 **点** $(x_i, y_i), (x_j, y_j)$ **を通る直線は**

$$a = \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}, \qquad b = y_i - \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j} x_i$$

$\longrightarrow$ **秘密情報** b **が判明した**

秘密分散

1 人では判らない理由：

2 **点を通る “直線”** $y = ax + b$ **は必ず存在する**

2 **点** $(x_i, y_i), (0, b)$ **を通る直線の傾きは**

$$a = \frac{y_i - b}{x_i}$$

どの値 b **も同様に可能性がある**

$\longrightarrow$ **何も知らないのと同じ**

実習：秘密分散

みなさんに配った “秘密情報の一部”（鍵）

$$\boxed{(x, y)}$$

1 次式 $y \equiv ax + b \pmod{11}$ で
秘密情報 b を分散して伝えたもの

近くの人の鍵を見せてもらって
秘密情報 b を復元しよう
（鍵が同じ値だったら他の近くの人に）

実習：秘密分散

- 法 $p = 11$ に関する掛け算表を埋めよう
  （なくても出来れば、埋めなくても良い）
- 引き算 $b - a$ はどうするの？
  $\longrightarrow$ $a + x = b$ となる x が $x = b - a$
  $\longrightarrow$ $b - a < 0$ なら p を足せば良い
- 割り算 $\frac{b}{a}$ はどうするの？
  $\longrightarrow$ $ax = b$ となる x が $x = \frac{b}{a}$
  $\longrightarrow$ 拡張互除法で計算できるが、
  今は表から探そう

「割り算」って何さ？ — 定義に立ち戻ること

有限体での $\frac{b}{a}$ とは何か？

「割り算」とは何だったか？

$$\boxed{\frac{b}{a} \text{ とは、} ax = b \text{ となる（ただ一つの）} x \text{ のこと}}$$

定義に立ち戻る（定義から出発する）ことで、
何であるかがはっきりする

秘密分散

**今は 1 次式（“直線” $y=ax+b$）を使ったので、
2 人が見せ合えば判ったが、**

**3 人の協力で判るようにするには、
2 次式（“放物線” $y=ax^2+bx+c$）を使えば良い**

一般に、

**k 人の協力で判るようにするには、
$(k-1)$ 次式を使って仕組みを設計すればよい**

（“n 人中 k 人” で出来る）

秘密分散

- **秘密を分散する人数は余り関係ない**
  $\longrightarrow$ **人数より大きな素数** p **を用いれば良い**

- **あてずっぽうでも確率** $\dfrac{1}{p}$ **で当たってしまう**
  $\longrightarrow$ **実際には大きな素数** p **を使う**
  （100 **桁とか** 200 **桁とか）**

- **割り算の計算を効率良く行なう必要がある**
  $\longrightarrow$ **Euclid の拡張互除法を用いる**

数理技術としての応用例 2

暗号 (cryptography)

- 秘密通信
- 電子認証・電子署名
- 鍵共有

暗号の利用

- 古典的：戦争・謀略など
- 現代：情報通信一般

$\longrightarrow$ **個人の独立を守るための重要な数理技術**

既に身近な暗号の利用

メディアセンターのコンピュータを使う際の
パスワードによる本人認証にも
暗号（暗号化）が使われている

入力したパスワードを
保管してあるデータと照合しているのだが、

実は、
パスワードそのものを保管しているのではない

定まった方式（暗号化関数）で
パスワードを変換して保管している

パスワードによる本人認証

- **暗号化関数でパスワードを変換して保管**
- **入力したパスワードを暗号化関数で変換して、保管してある文字列と照合**

暗号化関数に要請される性質は？

- **間違った文字列では変換結果が一致しない**
  $\longrightarrow$ **異なる入力には異なる値を返す（単射）**
- **保管してある文字列が露見しても元のパスワードが判明しない**
  $\longrightarrow$ **一方向性関数 (one-way function)**

パスワードによる本人認証

良い暗号化関数で変換して保管していても

通信経路の途中で盗聴されてしまっては

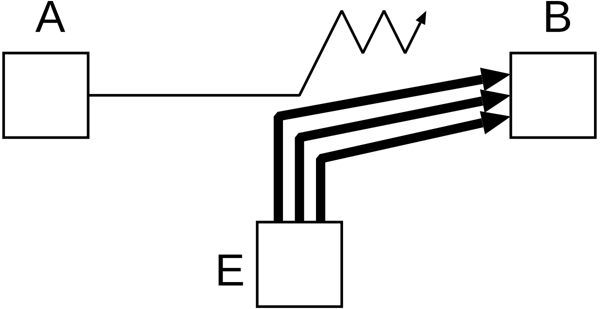
パスワードが露見してしまう

⟶ **暗号**による秘密通信

安全な情報伝達を阻害するもの

- 妨害（DoS 攻撃など）
- 盗聴
- 改竄
- なり済まし　　　　など

DoS (Denial of Service) 攻撃

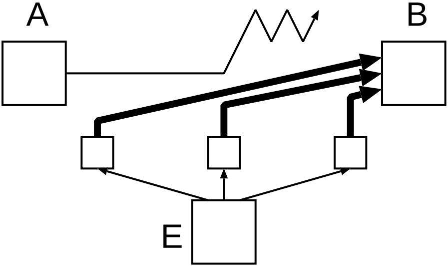


B を機能停止に追い込むには

E に相当のマシンパワーが必要

そこで実際には ・・・

DoS (Denial of Service) 攻撃



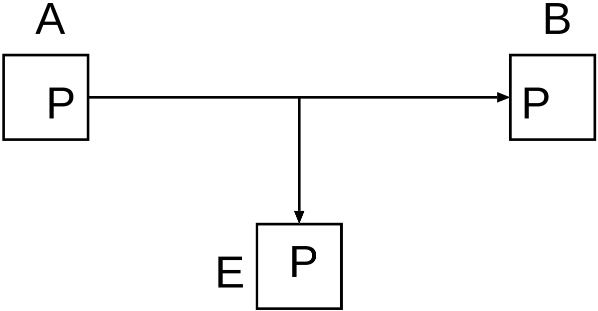
実際には、

コンピュータウイルス・乗っ取りなどで

制御下に置いた多数の機械から一斉に攻撃

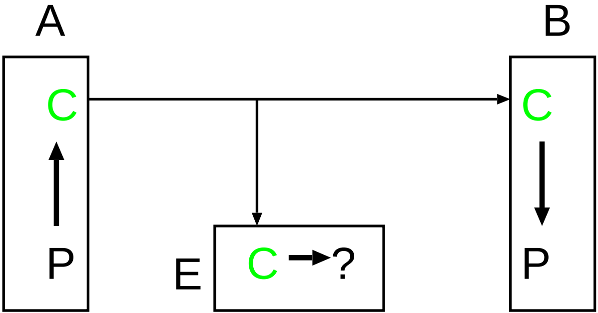
(Distributed DoS, DDoS)

盗聴



**現在の計算機ネットワークの仕組みでは、
事実上、通信経路は誰にでも見られる**

暗号通信で盗聴対策

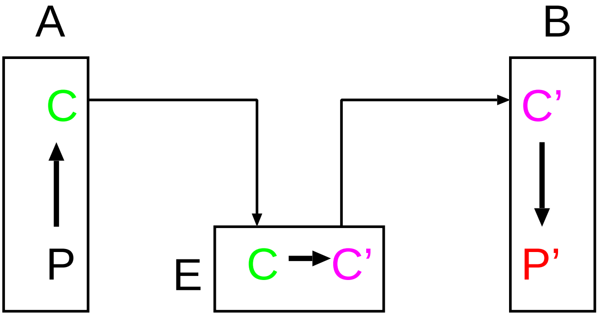


P : **平文** (plain text),　**C** : **暗号文** (ciphertext)

P → **C** : **暗号化** (encryption)

C → **P** : **復号** (decryption)・**解読**

改竄

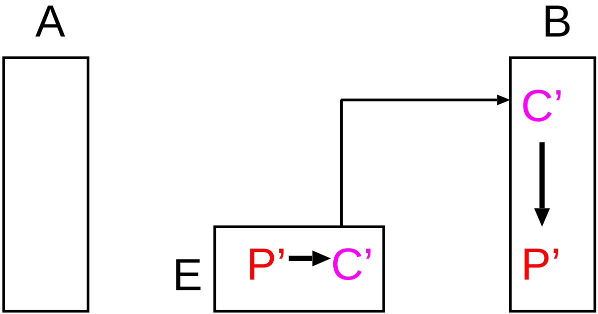


A が送信した情報であることを

確かめられるような仕組みが必要

（電子認証・電子署名）

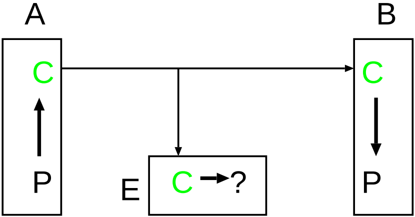
なり済まし



A が送信した情報であることを確かめられるような仕組みが必要

（電子認証・電子署名）

暗号 (cryptography)



- 送信者 A が平文 P を暗号化、暗号文 C を送信
- 受信者 B が暗号文 C を受信、平文 P に復号
- 盗聴者 E は暗号文 C を知っても
  平文 P を復元できない

⟶ B だけが**復号鍵**を持っていることが必要

次回に続く