2015 年度秋期

数の世界

（担当： 角皆）

情報技術と数理の利用

コンピュータの発展・情報化社会の進展に伴い、

数理の解明とその利用が
ますますます社会と密接になってきた

数理技術

情報技術と数理の利用

物理技術（17 世紀以来）：

基礎数理	$\Longrightarrow$ 理論的裏付け	物理現象	$\Longrightarrow$ 仕組みの構成	実用技術

情報技術（20 世紀以来）：

数理現象	$\Longrightarrow$ 仕組みの構成	数理技術	$\Longrightarrow$ 物理的実現	実用技術

数理の解明が直接に技術発展に繋がる

計算機で扱えるもの

計算機では本質的に

有限・離散

のものしか扱えない

- 無限・連続のものの近似
- 有限・離散であることの積極的活用

数理技術としての応用例 2

暗号 (cryptography)

- 秘密通信
- 電子認証・電子署名
- 鍵共有

暗号の利用

- 古典的：戦争・謀略など

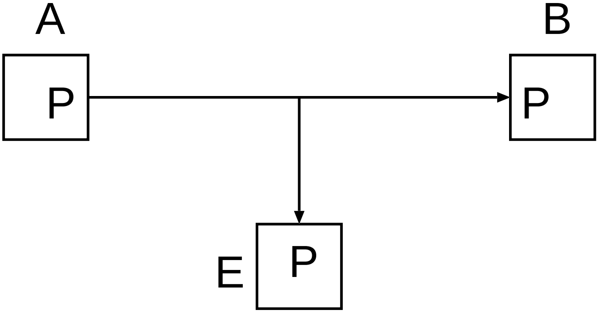
- 現代：情報通信一般

$\longrightarrow$ **個人の独立を守るための重要な数理技術**

安全な情報伝達を阻害するもの

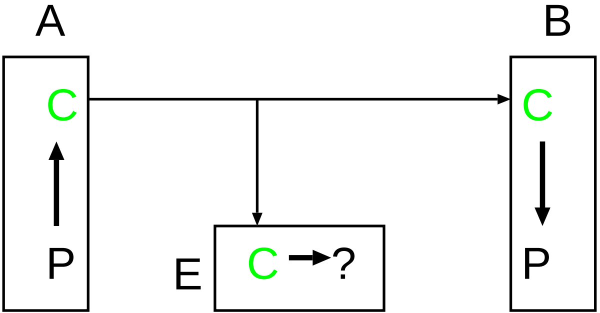
- 妨害（DoS 攻撃など）
- 盗聴
- 改竄
- なり済まし　　　　　など

盗聴



**現在の計算機ネットワークの仕組みでは、
事実上、通信経路は誰にでも見られる**

暗号通信で盗聴対策

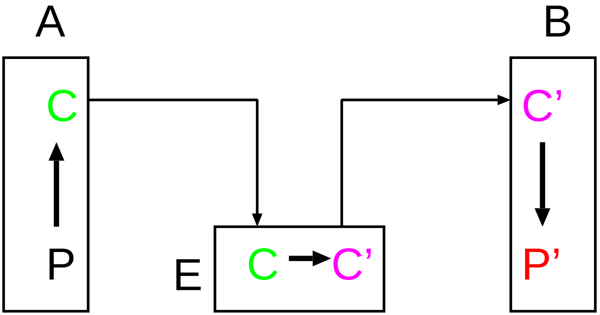


P：**平文** (plain text)，　C：**暗号文** (ciphertext)

P $\to$ C：**暗号化** (encryption)

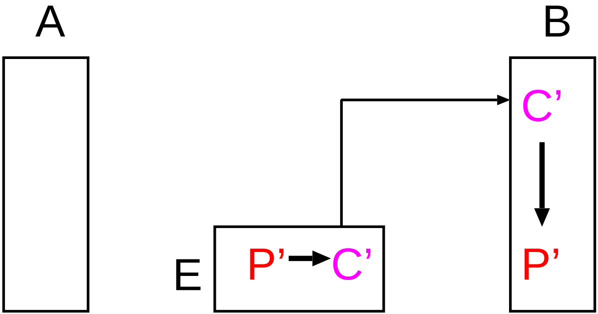
C $\to$ P：**復号** (decryption)・**解読**

改竄



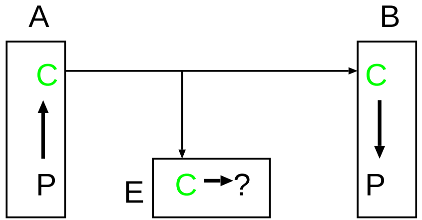
A が送信した情報であることを
確かめられるような仕組みが必要
（電子認証・電子署名）

なり済まし



**A が送信した情報であることを
確かめられるような仕組みが必要
（電子認証・電子署名）**

暗号 (cryptography)



- 送信者 A が平文 P を暗号化、暗号文 C を送信
- 受信者 B が暗号文 C を受信、平文 P に復号
- 盗聴者 E は暗号文 C を知っても
  平文 P を復元できない

⟶ B だけが**復号鍵**を持っていることが必要

暗号 (cryptography)

仮定：

公開された情報伝達路（盗聴可能 と仮定）で、

暗号方式を公開 して通信

古典的な暗号の例：Caesar 暗号

- ここでは、
  a 〜 z のアルファベットから成る文字列を
  暗号化
- 鍵：$1 \leq n \leq 25$ なる整数 n
- 暗号化：アルファベットを後ろに n 個ずらす
- 復号：アルファベットを前に n 個戻す

（但し、$\cdots$ xyzabc $\cdots$ と繋がるとする）

実習：古典的な暗号の例（Caesar 暗号）

**Caesar 暗号で暗号化された
次の文字列を解読してみよう**

phq dqg zrphq iru rwkhuv zlwk rwkhuv

- **共通鍵：** $1 \le n \le 25$ **なる整数** n
- **暗号化：アルファベットを後ろに** n **個ずらす**
- **復号：アルファベットを前に** n **個戻す**
  （但し、$\cdots$ xyzabc $\cdots$ と繋がるとする）

Caesar 暗号の脆弱性

鍵を知らなくても容易に解読されてしまった

何故か？

- 鍵の可能性が少なく、総当たりで倒せる
- 暗号文に平文の特徴が残っている

このような脆弱性を克服した暗号方式が
現在では用いられている

- DES (Deta Encryption Standard)
- AES (Advanced Encryption Standard)

Caesar 暗号の脆弱性

鍵を知らなくても容易に解読されてしまった

何故か？

- **鍵の可能性が少なく、総当たりで倒せる**
- **暗号文に平文の特徴が残っている**

このような脆弱性を克服した暗号方式が
現在では用いられている

- DES (Deta Encryption Standard)
- AES (Advanced Encryption Standard)

Caesar 暗号の脆弱性

鍵を知らなくても容易に解読されてしまった

何故か？

- 鍵の可能性が少なく、総当たりで倒せる
- 暗号文に平文の特徴が残っている

このような脆弱性を克服した暗号方式が
現在では用いられている

- DES (Deta Encryption Standard)
- AES (Advanced Encryption Standard)

共通鍵暗号

Caesar 暗号のように、

暗号化と復号とで同じ鍵を用いる暗号を

共通鍵暗号という

- 仕組みが比較的簡明
- 暗号化・復号が一般に高速
- 事前に鍵を秘密裡に共有しておく必要あり

共通鍵暗号

Caesar 暗号のように、

暗号化と復号とで同じ鍵を用いる暗号を

共通鍵暗号という

- 仕組みが比較的簡明
- 暗号化・復号が一般に高速
- 事前に鍵を秘密裡に共有しておく必要あり

共通鍵暗号

Caesar 暗号のように、

暗号化と復号とで同じ鍵を用いる暗号を

共通鍵暗号という

- 仕組みが比較的簡明
- 暗号化・復号が一般に高速
- 事前に鍵を秘密裡に共有しておく必要あり

現代における暗号への要請

現在の情報化社会では
様々な場面で暗号が使われている

例：インターネット取引（ネットショッピングなど）

- **不特定多数の人と暗号通信をしたい**
- **事前に鍵を共有できない**

$\longrightarrow$ **共通鍵暗号では実現が困難**

$\longrightarrow$ **公開鍵暗号・鍵共有方式のアイデア**
(1976, Diffie, Hellman)

現代における暗号への要請

現在の情報化社会では
様々な場面で暗号が使われている

例：インターネット取引（ネットショッピングなど）

- **不特定多数の人と暗号通信をしたい**
- **事前に鍵を共有できない**

$\longrightarrow$ **共通鍵暗号では実現が困難**

$\longrightarrow$ **公開鍵暗号・鍵共有方式のアイデア**
(1976, Diffie, Hellman)

現代における暗号への要請

現在の情報化社会では
様々な場面で暗号が使われている

例：インターネット取引（ネットショッピングなど）

- **不特定多数の人と暗号通信をしたい**
- **事前に鍵を共有できない**

$\longrightarrow$ **共通鍵暗号では実現が困難**

$\longrightarrow$ **公開鍵暗号・鍵共有方式のアイデア**
(1976, Diffie, Hellman)

公開鍵暗号

暗号化鍵（公開鍵）・復号鍵（秘密鍵）が別

- 事前の鍵共有の必要無し
  $\longrightarrow$ 見ず知らずの人からも送ってもらえる

- 認証・署名機能がある
  $\longrightarrow$ 改竄・なり済ましの対策
  $\longrightarrow$ 否認防止の機能も持つ

公開鍵暗号

暗号化鍵（公開鍵）・復号鍵（秘密鍵）が別

- **事前の鍵共有の必要無し**
  $\longrightarrow$ **見ず知らずの人からも送ってもらえる**

- **認証・署名機能がある**
  $\longrightarrow$ **改竄・なり済ましの対策**
  $\longrightarrow$ **否認防止の機能も持つ**

公開鍵暗号

暗号化鍵（公開鍵）・復号鍵（秘密鍵）が別

- 事前の鍵共有の必要無し
  $\longrightarrow$ 見ず知らずの人からも送ってもらえる

- 認証・署名機能がある
  $\longrightarrow$ 改竄・なり済ましの対策
  $\longrightarrow$ 否認防止の機能も持つ

公開鍵暗号

但し、一般には、
暗号化・復号が共通鍵暗号に比べて低速

そこで、

- 始めに公開鍵暗号方式で鍵を送付・共有
- その鍵を用いて秘密鍵暗号方式で通信

というように、組合わせて用いることが多い

公開鍵暗号

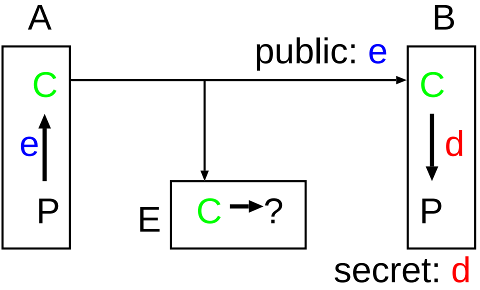
但し、一般には、
暗号化・復号が共通鍵暗号に比べて低速

そこで、

- **始めに公開鍵暗号方式で鍵を送付・共有**
- **その鍵を用いて秘密鍵暗号方式で通信**

というように、組合わせて用いることが多い

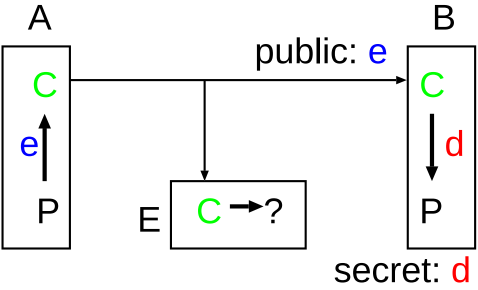
公開鍵暗号による暗号通信



しかし、これだと誰でも暗号化できるので、
A 氏が送った保証がない

⟶ 署名の必要性

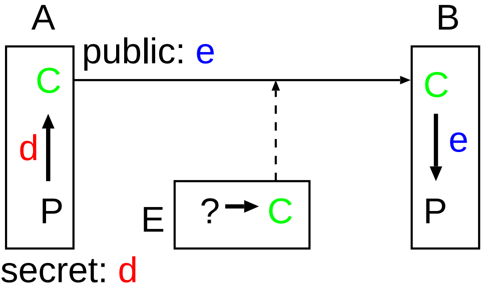
公開鍵暗号による暗号通信



しかし、これだと誰でも暗号化できるので、A 氏が送った保証がない

$\longrightarrow$ **署名の必要性**

公開鍵暗号を用いた認証・署名

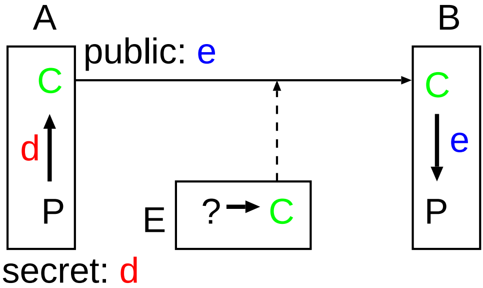


盗聴者 E 氏は

平文 P は判らないが、暗号文 C は盗聴可能

⟶ いつも同じ署名は使えない

公開鍵暗号を用いた認証・署名



盗聴者 E 氏は

平文 P は判らないが、暗号文 C は盗聴可能

⟶ **いつも同じ署名は使えない**

公開鍵暗号を用いた認証・署名

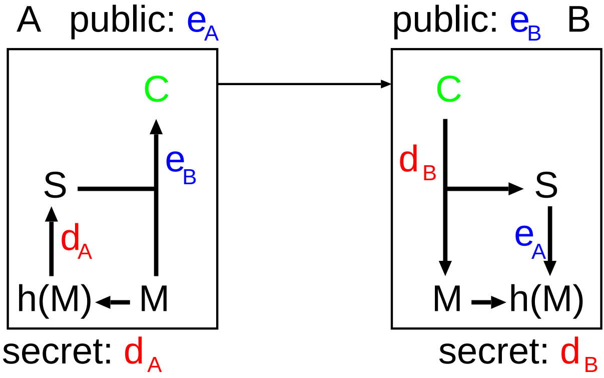
実際には、メッセージ本文 M に対して、

M から決まる短い値（ハッシュ値）$\mathrm{h}(M)$ を
送信者 A 氏の秘密鍵で暗号化した文字列 S

を本文 M に添付して、

受信者 B 氏の公開鍵で一緒に暗号化して送る

公開鍵暗号を用いた認証・署名 2



公開鍵暗号の特徴

- 暗号化は誰でも出来る
  （暗号化鍵は公開されている）

- 復号は秘密鍵を知らないと出来ない
  （もの凄く時間が掛かる）

そんな都合の良い仕組みが本当にあるのか？

公開鍵暗号の特徴

- 暗号化は誰でも出来る
  （暗号化鍵は公開されている）

- 復号は秘密鍵を知らないと出来ない
  （もの凄く時間が掛かる）

そんな都合の良い仕組みが本当にあるのか？

公開鍵暗号の例：RSA 暗号

Rivest, Shamir, Adleman (1977)

- **大きな素数 p, q を選び、積 $n = pq$ を作る**
- n を用いて、公開鍵 e・秘密鍵 d の対を作る
- 暗号化の計算は n と公開鍵 e とから可能
- 復号は秘密鍵 d を用いる
- n と公開鍵 e とから秘密鍵 d を求めるには、n の素因数分解 $n = pq$ が必要
- しかしそれは困難（膨大な計算時間が掛かる）

公開鍵暗号の例：RSA 暗号

Rivest, Shamir, Adleman (1977)

- **大きな素数 p, q を選び、積 $n = pq$ を作る**
- **n を用いて、公開鍵 e・秘密鍵 d の対を作る**
- **暗号化の計算は n と公開鍵 e とから可能**
- **復号は秘密鍵 d を用いる**
- **n と公開鍵 e とから秘密鍵 d を求めるには、n の素因数分解 $n = pq$ が必要**
- **しかしそれは困難（膨大な計算時間が掛かる）**

公開鍵暗号の例：RSA 暗号

Rivest, Shamir, Adleman (1977)

- **大きな素数 p, q を選び、積 $n = pq$ を作る**
- **n を用いて、公開鍵 e・秘密鍵 d の対を作る**
- **暗号化の計算は n と公開鍵 e とから可能**
- **復号は秘密鍵 d を用いる**
- **n と公開鍵 e とから秘密鍵 d を求めるには、n の素因数分解 $n = pq$ が必要**
- **しかしそれは困難（膨大な計算時間が掛かる）**

公開鍵暗号の例：RSA 暗号

Rivest, Shamir, Adleman (1977)

- **大きな素数** p, q **を選び、積** $n = pq$ **を作る**
- n **を用いて、公開鍵** e **・秘密鍵** d **の対を作る**
- **暗号化の計算は** n **と公開鍵** e **とから可能**
- **復号は秘密鍵** d **を用いる**
- n **と公開鍵** e **とから秘密鍵** d **を求めるには、** n **の素因数分解** $n = pq$ **が必要**
- **しかしそれは困難（膨大な計算時間が掛かる）**

公開鍵暗号の例：RSA 暗号

Rivest, Shamir, Adleman (1977)

- **大きな素数** p, q **を選び、積** $n = pq$ **を作る**
- n **を用いて、公開鍵** e**・秘密鍵** d **の対を作る**
- **暗号化の計算は** n **と公開鍵** e **とから可能**
- **復号は秘密鍵** d **を用いる**
- n **と公開鍵** e **とから秘密鍵** d **を求めるには、** n **の素因数分解** $n = pq$ **が必要**
- **しかしそれは困難（膨大な計算時間が掛かる）**

RSA 暗号

- 大きな素数 p, q を選び、積 $n = pq$ を作る
  $\star$ $p-1$ と $q-1$ との最小公倍数
  $$l := \mathrm{lcm}(p-1, q-1)$$ を求めておく
- 公開鍵 e・秘密鍵 d の対を作る
  $\star$ l と互いに素な整数 e を取る
  $\star$ $ed \equiv 1 \pmod{l}$ なる整数 d を求める
- 暗号化：$C \equiv P^e \pmod{n}$
- 復号：$P \equiv C^d \pmod{n}$

何故これでうまく機能するのか？

RSA 暗号

- **大きな素数** p, q **を選び、積** $n = pq$ **を作る**
  $\star$ $p-1$ **と** $q-1$ **との最小公倍数**
  $$l := \mathrm{lcm}(p-1, q-1)$$ **を求めておく**
- **公開鍵** e **・秘密鍵** d **の対を作る**
  $\star$ l **と互いに素な整数** e **を取る**
  $\star$ $ed \equiv 1 \pmod{l}$ **なる整数** d **を求める**
- **暗号化：** $C \equiv P^e \pmod{n}$
- **復号：** $P \equiv C^d \pmod{n}$

何故これでうまく機能するのか？

中国式剰余定理

$\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2$ が互いに素のとき、

$$\mathbb{Z}/\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/\mathfrak{m}_1\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/\mathfrak{m}_2\mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \pmod{\mathfrak{m}_1} \\ x \equiv a_2 \pmod{\mathfrak{m}_2} \end{cases}$$

は解を持ち、しかも $\bmod\ \mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2$ で一意的

$$\begin{cases} x \equiv a \pmod{\mathfrak{m}_1} \\ x \equiv a \pmod{\mathfrak{m}_2} \end{cases} \Longleftrightarrow x \equiv a \pmod{\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2}$$

中国式剰余定理

m_1, m_2 **が互いに素のとき、**

$$\mathbb{Z}/m_1m_2\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/m_1\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m_2\mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \pmod{m_1} \\ x \equiv a_2 \pmod{m_2} \end{cases}$$

は解を持ち、しかも $\mathrm{mod}\ m_1m_2$ **で一意的**

$$\begin{cases} x \equiv a \pmod{m_1} \\ x \equiv a \pmod{m_2} \end{cases} \Longleftrightarrow x \equiv a \pmod{m_1m_2}$$

中国式剰余定理

m_1, m_2 が互いに素のとき、

$$\mathbb{Z}/m_1m_2\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/m_1\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m_2\mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \pmod{m_1} \\ x \equiv a_2 \pmod{m_2} \end{cases}$$

は解を持ち、しかも $\bmod\ m_1m_2$ で一意的

$$\begin{cases} x \equiv a \pmod{m_1} \\ x \equiv a \pmod{m_2} \end{cases} \Longleftrightarrow x \equiv a \pmod{m_1m_2}$$

RSA 暗号の検証

- **暗号化：** $C \equiv P^e \pmod{n}$
- **復号：** $P \equiv C^d \pmod{n}$

$$P \equiv (P^e)^d \pmod{n}$$ **であるか**

---

p, q **は相異なる素数** $\longrightarrow$ **互いに素**

$\longrightarrow n = pq$ **で中国式剰余定理が使える**

$\longrightarrow \bmod p$ **と** $\bmod q$ **とで見れば良い**

Fermat の小定理

p を素数とするとき、

p と互いに素な整数 a に対し、

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

$n = pq, l = \mathrm{lcm}(p-1, q-1), ed \equiv 1 \pmod{l}$

のとき、

$ed \equiv 1 \pmod{(p-1)}$ **より** $P^{ed} \equiv P^1 \pmod{p}$

$ed \equiv 1 \pmod{(q-1)}$ **より** $P^{ed} \equiv P^1 \pmod{q}$

併せて、$P^{ed} \equiv P \pmod{n}$

Fermat の小定理

p を素数とするとき、

p と互いに素な整数 a に対し、

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

$n = pq, l = \mathrm{lcm}(p-1, q-1), ed \equiv 1 \pmod{l}$

のとき、

$ed \equiv 1 \pmod{(p-1)}$ より $P^{ed} \equiv P^1 \pmod{p}$

$ed \equiv 1 \pmod{(q-1)}$ より $P^{ed} \equiv P^1 \pmod{q}$

併せて、$P^{ed} \equiv P \pmod{n}$

鍵対の構成

では、l と互いに素な整数 e を与えたとき、

$ed \equiv 1 \pmod{l}$ なる整数 d
（l を法とした e の "逆数"）は、

Euclid の拡張互除法を用いることにより、
効率良く求めることが出来る !!

$(e, l) = 1$ より $\exists c, d \in \mathbb{Z} : ed + lc = 1$

RSA 暗号の安全性

これで RSA 方式が実際に動かせることが判った が、

では、RSA 暗号は安全な暗号なのか？

RSA 暗号

- **大きな素数** p, q **を選び、積** $n = pq$ **を作る**
  $\star$ $p-1$ **と** $q-1$ **との最小公倍数**
  $l := \mathrm{lcm}(p-1, q-1)$ **を求めておく**

- **公開鍵** e**・秘密鍵** d **の対を作る**
  $\star$ l **と互いに素な整数** e **を取る**
  $\star$ $ed \equiv 1 \pmod{l}$ **なる整数** d **を求める**

- **暗号化：** $C \equiv P^e \pmod{n}$

- **復号：** $P \equiv C^d \pmod{n}$

RSA 暗号

- **大きな素数** p, q **を選び、積** $n = pq$ **を作る**
- n **を用いて、公開鍵** e **・秘密鍵** d **の対を作る**
  （Euclid の互除法を用いる）
- **暗号化の計算は** n **と公開鍵** e **とから可能**
  $$C \equiv P^e \pmod{n}$$
- **復号は秘密鍵** d **を用いる**
  $$P \equiv C^d \pmod{n}$$
- n **と公開鍵** e **とから秘密鍵** d **を求めるには、**
  n **の素因数分解** $n = pq$ **が必要**
  (p, q **が不明だと** l **が求まらない）**

RSA 暗号の安全性

結局、RSA 暗号の安全性は、

素因数分解問題の（計算量的）困難さ

に掛かっている

現在の所、
充分速い計算法（多項式時間アルゴリズム）は
知られていない

$\longrightarrow$ **多くの数学者・計算機科学者が鋭意研究中**

RSA暗号の安全性

結局、RSA暗号の安全性は、

素因数分解問題の（計算量的）困難さ

に掛かっている

現在の所、
充分速い計算法（多項式時間アルゴリズム）は
知られていない

$\longrightarrow$ 多くの数学者・計算機科学者が鋭意研究中

RSA 暗号の安全性

もしも画期的に高速なアルゴリズムを発見したら、

いち早く学会に公表して
人類共有の財産とするであろう

我々科学者の独立によって
情報化社会の安全性が保証されている

というのは綺麗事で ・・・

RSA 暗号の安全性

もしも画期的に高速なアルゴリズムを発見したら、

いち早く学会に公表して
人類共有の財産とするであろう

我々科学者の独立によって
情報化社会の安全性が保証されている

というのは綺麗事で ・・・

RSA 暗号の安全性

もしも画期的に高速なアルゴリズムを発見したら、

いち早く学会に公表して
人類共有の財産とするであろう

我々科学者の独立によって
情報化社会の安全性が保証されている

というのは綺麗事で ···

素因数分解問題の他にも、

離散対数問題 (Discrete Logarithm Problem)

も暗号に応用されている

法 p と整数 g とを固定して、整数 A に対し、

$$g^x \equiv A \pmod{p}$$

となる整数 x を求めることが出来るか

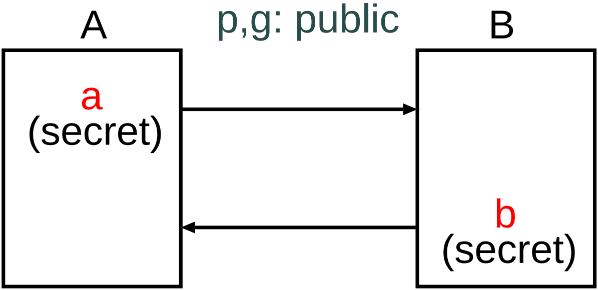
“$x = \log_g A$”

離散対数問題の応用（Diffie-Hellmanの鍵共有方式）

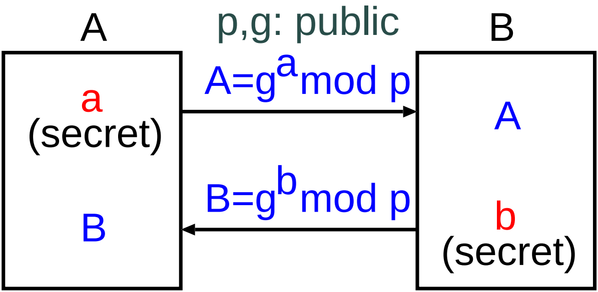
盗聴されている情報通信路を用いて、

秘密鍵を共有することが出来るか？

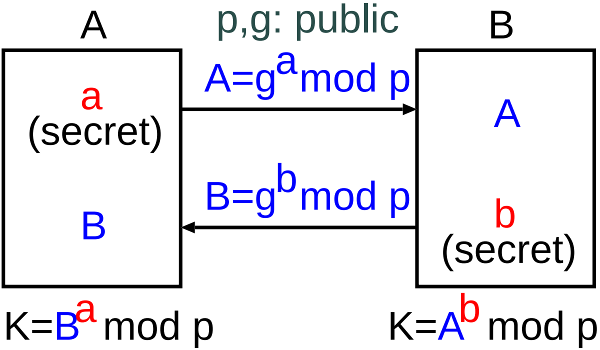
Diffie-Hellman の鍵共有方式



Diffie-Hellman の鍵共有方式



Diffie-Hellman の鍵共有方式



Diffie-Hellman の鍵共有方式

A　　　p,g: public　　　B

A: a (secret)

$A = g^{a} \bmod p$ →

B: A

← $B = g^{b} \bmod p$

A: B

B: b (secret)

$K = B^{a} \bmod p$　　　$K = A^{b} \bmod p$

$$K = g^{ab} \bmod p$$

実際には、

共通鍵暗号方式の方が公開鍵暗号方式より高速

$\longrightarrow$ **両者を組み合わせて用いることが多い**

- **始めに公開鍵暗号方式や鍵共有方式で秘密鍵を共有**
- **その秘密鍵を用いて共通鍵暗号方式で通信**

ElGamal 暗号

離散対数問題と疑似乱数と組み合わせて
暗号方式を構成したもの

RSA 暗号と同様に有限体の乗法群を用いる他にも、

- **有限体上の楕円曲線の有理点の成す群**
- **有限次代数体の ideal 類群**

などの有限アーベル群も用いられる
（様々な数理現象が利用されている）

秘密分散・公開鍵暗号・鍵共有などの

基本的な数理技術を組み合わせて用いると、

電子投票方式などを構成することも出来る

まとめ

- 現代の情報化社会を支える基盤技術として
  種々の数理技術が利用されている

- 数理現象の解明が
  直接に技術の進歩に繋がっている

- 人間は弱いもの
  $\longrightarrow$ 不正をしようとしても出来ない
  システムが望まれる
  $\longrightarrow$ “最も確かなもの” としての数理の利用