

今日の話題：

3 次方程式・4 次方程式の一般解法（解の公式）

って知ってますか？

→ 方程式の解法探求の歴史

→ まず今までに習った数学（算数）を振り返ろう
（人間と数学の歴史を振り返る）

小学校：

- 自然数（正の整数）の $+$ \times
- $-$ は出来ない時がある
- \div は商と余りとを求める（整除）
- 分数を用いた \div （正の有理数）
- 小数（近似値・正の実数）

中学・高校：

- 正負の数の四則（ $+$ $-$ \times \div ）
- 文字式（多項式）の $+$ $-$ \times
- \div は分数式（有理式）として
- 1変数の整除（商と余り）
- 数の $-$ \div \rightarrow 1次方程式
- 2次方程式の根の公式
- 簡単な連立方程式
- 3次以上は因数分解出来れば解ける

ところで …

大学で数学を習ったら

何が新しく出来るようになる？

中学・高校：

- 正負の数の四則（ $+$ $-$ \times \div ）
- 文字式（多項式）の $+$ $-$ \times
- \div は分数式（有理式）として
- 1変数の整除（商と余り）
- 数の $-$ \div \rightarrow 1次方程式
- 2次方程式の根の公式
- 簡単な連立方程式
- 3次以上は因数分解出来れば解ける

多変数多項式の割り算（余りを求める）



Gröbner 基底

（広中-Buchberger の algorithm）

多変数多項式環の ideal の標準的な生成系を
組織的に与えるアルゴリズム

連立方程式 \longrightarrow （一般には高次の）1 変数方程式へ
（変数消去）

ここでは、

3次以上の方程式の根の公式

を考えよう !!

2次方程式の根の公式

古代バビロニアで既に知られていた
(紀元前 2000 年頃!! 今と同じ平方完成の方法)

但し、

- 問題も解法も言葉で表された
- 係数は正の数のみ (非整数も OK)
- (正数の範囲の) 引き算は OK
- 解も正の数のみ

2次方程式の根の公式

考えている「数」は正の数のみ

→ 以下は別個に扱われた ($a > 0, b > 0$)

- $X^2 + aX = b$
- $X^2 = aX + b$
- $X^2 + b = aX$

しかし、分数・平方根の概念はあった

(→ 負の数は人間にとって考え難い?!)

3次方程式の解法（根の公式）は？

「**根の公式**」とは：
係数に

- 四則と冪根とを
- 有限回だけ

施して解を表す

文化的背景が数学の問題意識に影響？

参考：

- 作図問題：定規とコンパス
- 中国：解の近似計算（小数）

2次方程式の解法から遥か3500年の後、
遂に3次方程式の根の公式が発見された!!

16世紀前半 (del Ferro, Fontana, Cardano)

- 代数の記号法が進歩しつつある時期
(但し、まだ略記法に近い)
- 負の数はまだ半人前
- 立方完成して、さあそれからどうする

では、

この解法を現代の記号法で見たいこう

(以下、暫く板書で)

3 次方程式の根の公式 (Fontana-Cardano の公式)

$f(X) = X^3 + pX + q = 0$ の根は、

$$X = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}} \\ + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}}$$

(但し、3乗根は掛けて $-\frac{p}{3}$ となるように取る)

3乗根の1組を u, v とすると、($\omega^2 + \omega + 1 = 0$)

$$X = u + v, \omega u + \omega^2 v, \omega^2 u + \omega v$$

演習問題

3 次方程式 $X^3 - 21X + 20 = 0$ を、

- (1) 因数分解を見付けて解け。
- (2) Fontana-Cardano の方法で解いてみよ。
また両者の結果を比べよ。

4 次方程式の解法の発見 (16 世紀前半, Ferrari)

3 次方程式の解法から間もなく

- 時代が熟していた？
(考察の蓄積・記号法の発達など)
- 難しさの違いが少ない？
→ “難しさ” ってどう計る？

(以下、暫く板書で)

4 次方程式の Ferrari の解法

$$f(X) = X^4 + pX^2 + qX + r = 0$$

補助変数 t を導入して、

$$(X^2 + t)^2 = (2t - p)X^2 - qX + (t^2 - r)$$

の右辺が完全平方になる



$$q^2 - 4(2t - p)(t^2 - r) = 0$$

これは t の 3 次方程式

(**Fontana-Cardano** の公式で解ける!!)

→ この t を用いて解く

4 次多項式の 3 次分解式

$$g(t) = q^2 - 4(2t - p)(t^2 - r)$$

: 3 次分解式 (解核多項式, **resolvent**)

$T := 2t$ において、

$$\begin{aligned} R(T) &:= -g\left(\frac{t}{2}\right) \\ &= T^3 - pT^2 - 4rT - (q^2 - 4pr) \end{aligned}$$

$R(T)$ が因数分解できる

$\iff f(X)$ の根が 3 乗根を用いずに表せる