

## 2016年度秋期

代数学 III (ガロア理論) (SIC64800) 期末試験 (担当: 角皆)

実施: 2017年1月26日(木), 11:00 ~ 12:30, 1-101 教室

持込: 不可

### 一般的な諸注意

- 学生証または「臨時学生証(定期試験用)」を机の上に提示すること。
- 机の上に出してよい物は、学生証の他に筆記用具・下敷(白色かそれに近いもので無地)・時計(電卓機能等のないもの)のみ。
- ノート・プリント・参考書等の参照不可。計算機の使用不可。
- 携帯電話等は電源を切って鞆の中にしまっておくこと。くれぐれも鳴らさないこと。時計としての使用も不可。
- 不正の疑いを招く行為は慎むこと。
- 試験開始の指示があるまでは、問題用紙を裏返しておくこと。
- 試験開始後、まづ初めに学生番号・名前を答案用紙に記入すること。学生番号・名前の記入はボールペン・サインペン等で行なうこと。
- 答案用紙の2枚目以降が必要な場合は挙手して申し出ること。2枚目以降にも学生番号・名前の記入を忘れずに。また、全ての用紙に何枚目中の何枚目かを記入すること。
- 試験時間が終了したら直ちに解答を終了して筆記用具を置き、その後で指示に順って答案を提出すること。

### 問題について

- 問題番号の順に解答する必要はないが、どこがどの問題か明確に判るようにすること。
- 採点者が読めない答案・意図が伝わらない答案では採点できない。

---

### 宣伝(この期末試験とは無関係)

情報理工学科卒業研究発表会. 2017年2月13日(月)・14日(火)の両日に、今年度の情報理工学科卒業研究発表会が開かれます。数学(数理情報)グループは、市谷研究棟1階102教室で行ないます。いづれ自分が卒業研究発表会に臨むつもりの方は、是非聴きに行きましょう。途中入退場自由。

数学領域修士論文発表会. 2017年2月17日(金)に、市谷本館2階201教室で、今年度の数学領域修士論文発表会が開かれます。博士前期課程(いわゆる修士課程)の大学院生が研究の成果を修士論文としてまとめ、その口頭試問を兼ねた発表会です。特に進学を考えている人は是非聴きに行きましょう。途中入退場自由。

## 2016 年度秋期

### 代数学 III (ガロア理論) (SIC64800) 期末試験 (担当: 角皆)

問 1. 3 次方程式  $X^3 - 12X - 20 = 0$  を解け。

問 2. 体の拡大  $L/K$  において、

- (1)  $L$  の元  $x$  が  $K$  上代数的であることの定義を述べよ。
- (2) 拡大  $L/K$  が代数的であることの定義を述べよ。
- (3) 拡大  $L/K$  の次数  $[L : K]$  の定義を述べよ。
- (4) 拡大次数  $[L : K]$  が有限であれば、拡大  $L/K$  は代数的であることを示せ。

問 3. 有限次拡大  $L/K$  の中間体  $M$  に対し、 $\mathcal{X} = (x_1, \dots, x_n)$  を  $M$  の  $K$  上の基底、 $\mathcal{Y} = (y_1, \dots, y_m)$  を  $L$  の  $M$  上の基底とする。 $\mathcal{Z} := (x_1y_1, \dots, x_1y_m, \dots, x_ny_1, \dots, x_ny_m) = (x_iy_j)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$  が  $L$  の  $K$  上の基底を成すことを示したい。

- (1)  $\mathcal{Z}$  が  $K$  上の線型独立系であることを示せ。
- (2)  $\mathcal{Z}$  が  $L$  の  $K$ -線型空間としての生成系であることを示せ。
- (3) 以上で  $\mathcal{Z}$  が  $L$  の  $K$  上の基底を成すことが示されたが、このことから体拡大  $L/K, L/M, M/K$  の拡大次数の間に成立する関係式を記せ。

問 4.  $x = \sqrt{6 + 2\sqrt{11}} \in \overline{\mathbb{Q}}$  について、

- (1)  $x$  の  $\mathbb{Q}$  上の最小多項式  $f(X) := \text{Irr}(x; \mathbb{Q})(X) \in \mathbb{Q}[X]$  を求めよ。
- (2)  $x$  の  $\mathbb{Q}$  上の共役をすべて挙げよ。
- (3)  $f$  の根体  $K := \mathbb{Q}(x)$  は  $\mathbb{Q}$  上正規でないことを示せ。
- (4)  $K$  の  $\mathbb{Q}$  上の正規閉包  $\tilde{K}$ 、及びその拡大次数  $[\tilde{K} : \mathbb{Q}]$  を求めよ。
- (5)  $\tilde{K}/\mathbb{Q}$  の中間体を全て挙げよ。

問 5. 次の体拡大は Galois 拡大ではない。理由を簡潔に述べよ。

- (1)  $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5})/\mathbb{Q}$
- (2)  $F_p(T)/F_p(T^p)$  ( $p$  は素数、 $T$  は  $F_p$  上超越的)

問 6. (本問を解答する場合には次問は解答する必要はない。)

$\zeta = \zeta_7 := e^{\frac{2\pi i}{7}} \in \mathbb{C}$  について、実は  $\zeta \in \overline{\mathbb{Q}}$  である。

- (1)  $\zeta$  の  $\mathbb{Q}$  上の最小多項式  $\Phi_7(X) := \text{Irr}(\zeta; \mathbb{Q})(X) \in \mathbb{Q}[X]$  及び  $\mathbb{Q}$  上の共役を求めよ。
- (2)  $K_7 := \mathbb{Q}(\zeta_7)$  の  $\mathbb{Q}$  上の Galois 群  $G := \text{Gal}(K_7/\mathbb{Q})$  の構造を明らかにせよ。
- (3)  $\omega = \omega_7 := \zeta + \zeta^{-1} = 2 \cos \frac{2\pi}{7}$  の  $\mathbb{Q}$  上の最小多項式及び  $\mathbb{Q}$  上の共役を求めよ。
- (4)  $\alpha := \zeta + \zeta^2 + \zeta^4$  の  $\mathbb{Q}$  上の最小多項式及び  $\mathbb{Q}$  上の共役を求めよ。
- (5)  $G$  の部分群と  $K_7/\mathbb{Q}$  の中間体とについて、Galois 対応を踏まえて、包含関係と共に図示して列挙せよ。また、各中間体上の  $\zeta$  の最小多項式を求めよ。

問 7. (前問が難しい場合には本問を解答せよ。)

$\zeta = \zeta_5 := e^{\frac{2\pi i}{5}} \in \mathbb{C}$  について、実は  $\zeta \in \overline{\mathbb{Q}}$  である。

- (1)  $\zeta$  の  $\mathbb{Q}$  上の最小多項式  $\Phi_5(X) := \text{Irr}(\zeta; \mathbb{Q})(X) \in \mathbb{Q}[X]$  及び  $\mathbb{Q}$  上の共役を求めよ。
- (2)  $K_5 := \mathbb{Q}(\zeta_5)$  の  $\mathbb{Q}$  上の Galois 群  $G := \text{Gal}(K_5/\mathbb{Q})$  の構造を明らかにせよ。
- (3)  $\omega = \omega_5 := \zeta + \zeta^{-1} = 2 \cos \frac{2\pi}{5}$  の  $\mathbb{Q}$  上の最小多項式及び  $\mathbb{Q}$  上の共役を求めよ。
- (4)  $G$  の部分群と  $K_5/\mathbb{Q}$  の中間体とについて、Galois 対応を踏まえて、包含関係と共に図示して列挙せよ。また、中間体上の  $\zeta$  の最小多項式を求めよ。

以上