

まとめ並びに演習問題及び補足 (12/16 配布)

本授業で取り上げた内容のまとめを兼ねて演習問題として挙げておく。問題番号に付いた A から D までの記号のついての大まかな目安としては、

- A: 定義の確認または基本的な概念の理解として身に付けてもらいたいもの
- B: 基本的な例または証明として期末試験の中心となる程度のもの
- C: 期末試験の内容としてはやや難しい部類のもの (難しい訳ではないが面倒というようなものも含む)
- D: 期末試験の内容としてはかなり難しいか、引続きの学修のために挙げるもの

という感じである。

年明けに続き ( $R$  を規定する公理など) を配る予定。

## 1. 同値関係・類別・商集合

問 1-1A. 集合  $X$  上の関係  $\sim$  について

- (1)  $\sim$  が同値関係であることの定義を述べよ。
- (2)  $X$  上の同値関係  $\sim$  に関する  $x \in X$  の同値類とは何か。
- (3)  $X$  上の同値関係  $\sim$  によって定まる商集合  $X/\sim$  とは何か。

問 1-2B. 実数全体の集合  $R$  上に次で定める関係  $\sim$  は同値関係であるか。(同値関係であるならばそのことを示し、そうでないならば同値関係が満たすべき条件のうち何が満たされないかを反例を挙げて指摘せよ。)

- (1)  $a \sim b \iff b - a \in \mathbb{Z}$
- (2)  $a \sim b \iff a \leq b$
- (3)  $a \sim b \iff b - a = 1$
- (4)  $a \sim b \iff |b - a| \leq 0.001$

問 1-3B. 上問で  $\sim$  が同値関係であるものについて、 $R/\sim$  は何の集合だと考えられるか。

## 2. $\mathbb{Z}$ から $\mathbb{Q}$ へ

本節では、整数全体の集合  $\mathbb{Z}$  についての基本的な性質 (演算・大小関係など) については既知 (既に基礎付け済み) であるが、有理数全体の集合  $\mathbb{Q}$  についてはここで構成するまで知らない、という立場で考えよ。

問 2-1B. 整数全体の集合  $\mathbb{Z}$  から有理数全体の集合  $\mathbb{Q}$  は次のように構成できる。

- (1)  $X := \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$  上に次で定める関係  $\sim$  は同値関係である:
  - $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in X$  に対し、 $(a_1, b_1) \sim (a_2, b_2) \iff a_1 b_2 = a_2 b_1$ $(a, b) \in X$  の  $\sim$  に関する同値類を  $a/b$  と書き、 $X$  の  $\sim$  による商集合  $X/\sim$  を  $\mathbb{Q}$  と書く。
- (2)  $\iota: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$  を  $\iota(a) := a/1$  で定めると、 $\iota$  は単射。(通常  $a \in \mathbb{Z}$  と  $\iota(a) \in \mathbb{Q}$  とを同一視して  $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$  と見る。)

問 2-2B. 上問で構成した  $\mathbb{Q}$  には自然に加法が定まり、良い性質を持つ。即ち:

- (1)  $a_1/b_1, a_2/b_2 \in \mathbb{Q}$  に対し、次で  $a_1/b_1 + a_2/b_2 \in \mathbb{Q}$  を定めると well-defined である:
  - $a_1/b_1 + a_2/b_2 := (a_1 b_2 + a_2 b_1)/b_1 b_2$(ここでの well-defined とは、 $(a_1 b_2 + a_2 b_1)/b_1 b_2 \in \mathbb{Q}$  であるということもあるが、主に)「代表元の取り方に依らずに定まる」、即ち、 $(a_1, b_1) \sim (a'_1, b'_1), (a_2, b_2) \sim (a'_2, b'_2) \implies (a_1 b_2 + a_2 b_1, b_1 b_2) \sim (a'_1 b'_2 + a'_2 b'_1, b'_1 b'_2)$  ということ。これを示す。)
- (2) 上で定めた  $\mathbb{Q}$  上の加法  $+$  は次を満たす:
  - (a)  $\forall x, y \in \mathbb{Q}: x + y = y + x$
  - (b)  $\forall x, y, z \in \mathbb{Q}: (x + y) + z = x + (y + z)$
  - (c)  $\forall x \in \mathbb{Q}: 0 + x = x, x + 0 = x$  (ここでの  $0$  は  $\iota(0)$  のこと)
  - (d)  $\forall x \in \mathbb{Q}: \exists y \in \mathbb{Q}: x + y = 0, y + x = 0$
- (3)  $\mathbb{Z}$  上の加法  $+$  との間で次を満たす:
  - $\forall a, b \in \mathbb{Z}: \iota(a + b) = \iota(a) + \iota(b)$

問 2-3B. 乗法についても、 $Q$  には自然に乗法が定まり、同様の良い性質を持つ。

- (1)  $Q$  の乗法  $\cdot$  をしかるべく定義せよ。
- (2) このとき  $Q$  上の乗法  $\cdot$  は次を満たす：
  - (a)  $\forall x, y \in Q : x \cdot y = y \cdot x$
  - (b)  $\forall x, y, z \in Q : (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
  - (c)  $\forall x \in Q : 1 \cdot x = x, x \cdot 1 = x$  (ここでの 1 は  $\iota(1)$  のこと)
  - (d)  $\forall x, y, z \in Q : (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z, x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$
  - (e)  $\forall x \in Q \setminus \{0\} : \exists y \in Q : x \cdot y = 1, y \cdot x = 1$
- (3)  $Z$  上の乗法  $\cdot$  との間で次を満たす：
  - $\forall a, b \in Z : \iota(a \cdot b) = \iota(a) \cdot \iota(b)$

問 2-4B.  $Q$  には自然に大小関係  $<$  が定まり、良い性質を持つ。即ち：

- (1)  $Q$  上に関係  $<$  を次で定めると well-defined である：
  - $a_1/b_1, a_2/b_2 \in Q$  に対し、  
 $a_1/b_1 < a_2/b_2$   
 $\iff (b_1 b_2 > 0 \text{ かつ } a_1 b_2 < a_2 b_1)$  または  $(b_1 b_2 < 0 \text{ かつ } a_1 b_2 > a_2 b_1)$   
 (また、便利のために関係  $>$  を  $x > y \iff y < x$  で定めておく。)
- (2) 上で定めた  $Q$  上の関係  $<$  は次を満たす：
  - (a)  $\forall x, y \in Q$  に対し  $x < y, x = y, x > y$  のうち一つ、かつ一つのみが成り立つ。
  - (b)  $\forall x, y, z \in Q : x < y, y < z \implies x < z$
- (3)  $Q$  上の関係  $<$  は次を満たす ( $Q$  上の演算と同調する)：
  - (a)  $\forall x, y, z \in Q : x < y \implies x + z < y + z$
  - (b)  $\forall x, y, z \in Q : x < y, 0 < z \implies x \cdot z < y \cdot z$
- (4)  $Z$  上の大小関係  $<$  との間で次を満たす：
  - $\forall a, b \in Z : a < b \iff \iota(a) < \iota(b)$

### 3. $N$ から $Z$ へ

本節では、自然数全体の集合  $N = \{0, 1, 2, \dots\}$  についての基本的な性質 (演算・大小関係など) については既知 (既に基礎付け済み) であるが、整数全体の集合  $Z$  についてはここで構成するまで知らない、という立場で考えよ。

問 3-1B. 前節の  $Z$  から  $Q$  への構成に倣って、自然数全体の集合  $N$  から整数全体の集合  $Z$  を構成しよう。即ち、

- (1)  $X := N \times N$  上に次で定める関係  $\sim$  は同値関係である：
  - $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in X$  に対し、 $(a_1, b_1) \sim (a_2, b_2) \iff a_1 + b_2 = a_2 + b_1$   
 $X$  の  $\sim$  による商集合  $X/\sim$  を  $Z$  と書く。
- (2)  $\iota : N \rightarrow Z$  を  $\iota(a) := \overline{(a, 0)}$  ( $\overline{(a, 0)} \in Z$  は  $(a, 0) \in X$  の属する同値類) で定めると、 $\iota$  は単射。(通常  $a \in N$  と  $\iota(a) \in Z$  とを同一視して  $N \subset Z$  と見る。)
- (3)  $Z$  の任意の元は、或る  $a \in N$  を用いて  $\overline{(a, 0)}$  または  $\overline{(0, a)}$  と書ける。 ( $-a := \overline{(0, a)}$  と書く。)

問 3-2C. 前節の  $Z$  から  $Q$  への構成に倣って、 $N$  上の加法  $+$ ・乗法  $\cdot$ ・大小関係  $<$  から、 $Z$  上の加法  $+$ ・乗法  $\cdot$ ・大小関係  $<$  を定義し、しかるべき性質を示せ。

### 4. PEANO の公理による $N$ の基礎付け

本節では、自然数全体の集合  $N = \{0, 1, 2, \dots\}$  については、ここで公理で規定されるまで知らない、という立場で考えよ。

集合  $N$  とその元  $0 \in N$  および写像  $s : N \rightarrow N$  の組  $(N, 0, s)$  が、次の公理系 (Peano の公理系) を満たすとする：

- (1)  $\forall n \in N : s(n) \neq 0$
- (2)  $s$  : 単射 (即ち、 $\forall n, m \in N : s(n) = s(m) \implies n = m$ )
- (3) 部分集合  $S \subset N$  に対して次が成り立つならば  $S = N$  :
  - (a)  $0 \in S$
  - (b)  $\forall k \in S : s(k) \in S$

(これは数学的帰納法の原理を公理化したものに他ならない。)

以下、 $N$  の元を自然数と呼ぶ。また、 $n' := s(n)$  と書き、 $n'$  を  $n$  の後継・後続数・次などと呼ぶ。必要ならば、 $1 := 0', 2 := 1'$  等々と書く。

問 4-1B. 0 以外の自然数は或る自然数の後継である。即ち

- $\forall n \in N : (n = 0 \text{ または } \exists m \in N : n = m')$

(ヒント：この条件を満たす自然数全体の成す集合を  $S$  として、 $S = N$  を示せ。)

問 4-2B.  $n \in N$  に対し、次で (帰納的に)  $S(n) \subset N$  を定義し、 $n$  の切片と呼ぶ：

- $S(0) := \{0\}$
- $S(n') := S(n) \cup \{n'\}$

このとき、次が成り立つ：

- (1)  $S(1) = \{0, 1\}, S(2) = \{0, 1, 2\}$  等々
- (2)  $\forall n \in N : S(n') = \{0\} \cup \{m' \mid m \in S(n)\}$
- (3)  $\forall n \in N : n' \notin S(n)$

問 4-3C. 前問で定義した切片を用いて、 $N$  上の関係  $\leq$  を次で定める：

- $a, b \in N$  に対し、 $a \leq b \iff a \in S(b)$

(また、便利のために関係  $\geq$  を  $a \geq b \iff b \leq a$  で、関係  $<$  を  $a < b \iff (a \leq b \text{ かつ } a \neq b)$  で定めておく。関係  $>$  もしかるべく定めよ。)

(1) このとき、次が成り立つ：

- (a)  $\forall a \in N : a \leq a$
  - (b)  $\forall a, b \in N : a \leq b, b \leq a \implies a = b$
  - (c)  $\forall a, b, c \in N : a \leq b, b \leq c \implies a \leq c$
- (2)  $\forall a, b \in N : a \leq b \iff a' \leq b'$
  - (3)  $\forall a, b \in N : (a \leq b \text{ または } b \leq a)$

問 4-4B.  $N$  上の加法  $+$  を、次で (帰納的に) 定義する：

- $n + 0 := n$
- $n + m' := (n + m)'$

このとき、次のようなしかるべき性質が成り立つことを示せ。

- (1)  $\forall a, b, c \in N : (a + b) + c = a + (b + c)$
- (2)  $\forall a \in N : 0 + a = a$
- (3)  $\forall a, b \in N : a' + b = (a + b)'$
- (4)  $\forall a, b \in N : a + b = b + a$
- (5)  $\forall a, b, c \in N : a + c = b + c \implies a = b$

問 4-5C.  $N$  上の乗法  $\cdot$  を、次で (帰納的に) 定義する：

- $n \cdot 0 := 0$
- $n \cdot m' := n \cdot m + n$

このとき、次のようなしかるべき性質が成り立つことを示せ。

- (1)  $\forall a, b, c \in N : (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- (2)  $\forall a \in N : 0 \cdot a = 0$
- (3)  $\forall a \in N : 1 \cdot a = a$  (ここに  $1 := 0'$ )
- (4)  $\forall a, b \in N : a \cdot b = b \cdot a$
- (5)  $\forall a, b, c \in N : (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$
- (6)  $\forall a, b, c \in N : a \cdot c = b \cdot c, c \neq 0 \implies a = b$

問 4-6C.  $N$  上の加法  $+$  と大小関係  $\leq$  との間に、次が成り立つ：

- $n \leq m \iff \exists k \in N : n + k = m$

(従って、先に加法  $+$  を定義して、これで大小関係  $\leq$  を定義しても良かった。こちらを  $\leq$  の定義として、上で示した  $\leq$  の諸性質を証明してみよ。)

問 4-7D.  $N$  上の冪  $n^m$  を、しかるべく帰納的に定義し、しかるべき性質を示せ。

## 5. $\varepsilon$ - $\delta$ 論法

本節では、実数全体の集合  $R$  についての基本的な性質（演算・大小関係など）については或る程度は素朴に知っているという上で、 $R$  における数列の収束について  $\varepsilon$ - $N$  流に定式化する、という立場で考えよ。（「 $\varepsilon$ - $\delta$  論法」とは、関数の収束の定式化において、習慣的に文字  $\varepsilon, \delta$  を用いることから来る呼び名であり、数列の収束の場合は、習慣的に文字  $\varepsilon, N$  を用いるので、「 $\varepsilon$ - $N$  論法」と呼ぶべきかもしれないが、両者を包括して「 $\varepsilon$ - $\delta$  論法」と呼ぶことが多いので、ここでは標題として「 $\varepsilon$ - $\delta$  論法」を用いた。尚、数列の収束・極限においては（関数の極限と違って）「 $n \rightarrow \infty$  で」に決まっているので、以下ではこれを省略する。）

実数列の収束について以下で定義する：実数列  $a = (a_n)_{n=0}^{\infty}$  について、

- $a_n \rightarrow \alpha \iff \forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbf{N} : \forall n \in \mathbf{N} : n \geq N \implies |a_n - \alpha| < \varepsilon$   
（少し端折って、 $\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbf{N} : \forall n \geq N : |a_n - \alpha| < \varepsilon$  と書くことも多い。）
- $a_n \rightarrow +\infty \iff \forall M \in \mathbf{R} : \exists N \in \mathbf{N} : \forall n \in \mathbf{N} : n \geq N \implies a_n > M$
- $a_n \rightarrow -\infty$  も同様（しかるべく定式化せよ）

実数列  $a = (a_n)_{n=0}^{\infty}$  について、Cauchy 列（基本列）ということを次で定義する：

- $a$  が Cauchy 列  $\iff \forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbf{N} : \forall n, m \in \mathbf{N} : n, m \geq N \implies |a_n - a_m| < \varepsilon$

また、実数列  $a = (a_n)_{n=0}^{\infty}$  について、有界ということも次で定義する：

- $a$  が有界  $\iff \exists C > 0 : \forall n \in \mathbf{N} : |a_n| < C$
- $a$  が上に有界  $\iff \exists C \in \mathbf{R} : \forall n \in \mathbf{N} : a_n < C$
- $a$  が下に有界  $\iff \exists C \in \mathbf{R} : \forall n \in \mathbf{N} : a_n > C$

問 5-1A. 実数列  $a = (a_n)_{n=0}^{\infty}$  について、 $a_n \rightarrow \alpha$  でない（数列  $a$  が  $\alpha$  に収束しない）ということも、論理式で記述せよ。

問 5-2B. 実数列  $a = (a_n)_{n=0}^{\infty}$  が或る実数  $\alpha$  に収束するとき、 $a$  が Cauchy 列であることを示せ。

問 5-3B. 実数列  $a = (a_n)_{n=0}^{\infty}, b = (b_n)_{n=0}^{\infty}$  について、 $a_n \rightarrow \alpha, b_n \rightarrow \beta$  ならば、 $a + b := (a_n + b_n)_{n=0}^{\infty}$  で定める数列  $a + b$  について、 $a_n + b_n \rightarrow \alpha + \beta$  であることを示せ。

問 5-4C. 前問と同じ状況で、 $a \cdot b := (a_n b_n)_{n=0}^{\infty}$  で定める数列  $a \cdot b$  について、 $a_n b_n \rightarrow \alpha \beta$  であることを示せ。

問 5-5A. 実数列  $a = (a_n)_{n=0}^{\infty}$  が有界であることと、上に有界かつ下に有界であることが同値であることを示せ。

問 5-6B. 実数列  $a = (a_n)_{n=0}^{\infty}$  について、

- (1)  $a$  が収束するならば、有界であることを示せ。
- (2)  $a_n \rightarrow \alpha > 0$  ならば、 $\exists c > 0 : \exists N \in \mathbf{N} : \forall n \geq N : a_n > c > 0$  であることを示せ。

問 5-7D. 実数列  $a = (a_n)_{n=0}^{\infty}, b = (b_n)_{n=0}^{\infty}$  について、 $a_n \rightarrow \alpha, b_n \rightarrow \beta$  で  $\beta \neq 0$  ならば、或る  $N \in \mathbf{N}$  が存在して、 $n \geq N$  なる  $n \in \mathbf{N}$  に対して  $a_n/b_n$  が定義できて、 $a_n/b_n \rightarrow \alpha/\beta$  となることを示せ。

問 5-8C. 実数列  $a = (a_n)_{n=1}^{\infty}$  に対し、部分和の平均  $t_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k$  によって定める数列

$t = (t_n)_{n=1}^{\infty}$  を考える。

- (1)  $a$  が有界ならば、 $t$  も有界であることを示せ。
- (2)  $a_n \rightarrow \alpha$  ならば、 $t_n \rightarrow \alpha$  であることを示せ。

## 6. $Q$ から $R$ へ (1) DEDEKIND の切断

本節および次節では、有理数全体の集合  $Q$  についての基本的な性質（演算・大小関係など）については既知（既に基礎付け済み）であるが、実数全体の集合  $R$  についてはここで構成するまで知らない、という立場で考えよ。

$Q$  の部分集合の対  $(A, B)$  が次を満たすとき、 $Q$  の切断であるという：

- $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset, A \cup B = Q, A \cap B = \emptyset$
- $\forall a \in A, \forall b \in B : a < b$

このとき、次の3つの場合がある：

- (I)  $A$  には最大値がなく、 $B$  にも最小値がない
- (II)  $A$  には最大値  $\max A$  が存在し、 $B$  には最小値がない
- (III)  $A$  には最大値がなく、 $B$  には最小値  $\min B$  が存在する

本節の構成では、次で  $R$  を定める：

- $R := \{(A, B) \mid Q \text{ の切断で、type (I) または (II) }\}$

問 6-1A.  $Q$  (に限らず、大小関係  $<$  が定義されている集合) の部分集合  $S$  の最大値  $\max S$  および最小値  $\min S$  の定義を述べよ。(論理式を用いて満たすべき条件を書き下せ。)

問 6-2A.  $Q$  の有界な部分集合  $S$  で最大値も最小値も持たないものの例を挙げよ。

問 6-3B.  $Q$  の切断で type (II) のものと type (III) のものとは一対一に対応する。(上の  $R$  の構成では、 $R$  内の有理数に対応する。)

問 6-4B.  $Q$  の切断で type (I) であるものの例を挙げよ。

問 6-5B. 有理数  $c \in Q$  に対応する type (II) の切断を自然に定めることにより、単射  $\iota: Q \rightarrow R$  を定めよ。(通常  $c \in Q$  と  $\iota(a) \in R$  とを同一視して  $Q \subset R$  と見る。)

問 6-6B.  $Q$  の切断(即ち  $R$  の元)の間に、大小関係  $\leq$  を次で定める：

- $(A_1, B_1), (A_2, B_2) \in R$  に対し、 $(A_1, B_1) \leq (A_2, B_2) \iff A_1 \subset A_2 (\iff B_1 \supset B_2)$

(1) このとき、次が成り立つ：

- (a)  $\forall x \in R: x \leq x$
- (b)  $\forall x, y \in R: x \leq y, y \leq x \implies x = y$
- (c)  $\forall x, y, z \in R: x \leq y, y \leq z \implies x \leq z$

(2)  $Q$  上の大小関係  $\leq$  との間で次を満たす：

- $\forall a, b \in Q: a \leq b \iff \iota(a) \leq \iota(b)$

問 6-7C.  $R$  に加法  $+$  および乗法  $\cdot$  を自然に定義し、諸々の良い性質が成り立つことや、上で定めた大小関係と同調することを示せ。

## 7. $Q$ から $R$ へ (2) CAUCHY 列の類別

$Q$  内の Cauchy 列全体の成す集合を  $\mathcal{C}$  とし、 $\mathcal{C}$  上の関係  $\sim$  を次で定めると同値関係である：

- $\mathbf{a} = (a_n)_{n=0}^{\infty}, \mathbf{b} = (b_n)_{n=0}^{\infty}$  に対し、  
 $\mathbf{a} \sim \mathbf{b} \iff a_n - b_n \rightarrow 0$   
( $\iff \forall \varepsilon > 0: \exists N \in \mathbf{N}: \forall n \in \mathbf{N}: n \geq N \implies |a_n - b_n| < \varepsilon$ )

本節の構成では、次で  $R$  を定め、 $\mathbf{a} \in \mathcal{C}$  の属する同値類を  $\bar{\mathbf{a}} \in R$  と書く：

- $R := \mathcal{C} / \sim$

問 7-1B. 上で定めた  $\mathcal{C}$  上の関係  $\sim$  が同値関係であることを示せ。

問 7-2B.  $\iota: Q \rightarrow R$  を  $\iota(a) := \overline{(a, a, a, \dots)}$  で定めると、 $\iota$ : 単射。これにより  $Q \subset R$  と見なす。

問 7-3B. 一般に列  $\mathbf{a} = (a_n)_{n=0}^{\infty}$  に対し、(狭義)単調増加な自然数列  $(k_n)_{n=0}^{\infty}$  (即ち、 $k_0 < k_1 < k_2 < \dots$ ) によって定まる列  $(a_{k_n})_{n=0}^{\infty} = (a_{k_0}, a_{k_1}, a_{k_2}, \dots)$  を  $\mathbf{a}$  の部分列という。 $\mathbf{a} = (a_n)_{n=0}^{\infty} \in \mathcal{C}$  に対し、その任意の部分列  $\mathbf{a}'$  も  $\mathbf{a}' \in \mathcal{C}$  であり、かつ  $\mathbf{a} \sim \mathbf{a}'$  であることを示せ。

問 7-4B.  $R$  上の加法  $+$  について、

(1)  $\mathcal{C}$  の加法  $+$  を次で定めると well-defined：

- $\mathbf{a} = (a_n)_{n=0}^{\infty}, \mathbf{b} = (b_n)_{n=0}^{\infty} \in \mathcal{C}$  に対し、 $\mathbf{a} + \mathbf{b} := (a_n + b_n)_{n=0}^{\infty}$   
(ここでの well-defined とは、 $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{C}$  に対し、 $\mathbf{a} + \mathbf{b} \in \mathcal{C}$  という事。)

(2)  $R$  上の加法  $+$  を次で定めると well-defined：

- $\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}} \in R$  に対し、 $\overline{\mathbf{a} + \mathbf{b}} := \overline{\mathbf{a}} + \overline{\mathbf{b}}$   
(ここでの well-defined とは、代表元の取り方に依らないということ。)

(3) 上で定めた  $R$  上の加法  $+$  は、( $Q$  上の加法  $+$  で成り立つような) しかるべき良い性質を満たす。

問 7-5C.  $R$  上の乗法  $\cdot$  について、

- (1)  $\mathcal{C}$  の乗法  $\cdot$  を次で定めると well-defined :
  - $\mathbf{a} = (a_n)_{n=0}^{\infty}, \mathbf{b} = (b_n)_{n=0}^{\infty} \in \mathcal{C}$  に対し、 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} := (a_n \cdot b_n)_{n=0}^{\infty}$   
(ここでの well-defined とは、 $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{C}$  に対し、 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \in \mathcal{C}$  ということ。Cauchy 列が有界であることを用いると良い。)
- (2)  $R$  上の乗法  $\cdot$  を次で定めると well-defined :
  - $\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}} \in R$  に対し、 $\overline{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}} := \bar{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{b}}$   
(ここでの well-defined とは、代表元の取り方に依らないということ。)
- (3) 上で定めた  $R$  上の乗法  $\cdot$  は、( $Q$  上の乗法  $\cdot$  で成り立つような) しかるべき良い性質を満たす。(本問では乗法  $\cdot$  の逆演算 (除法) に関するもの以外に留める。)

問 7-6D.  $R$  の大小関係について、

- (1)  $\mathbf{a} = (a_n)_{n=0}^{\infty} \in \mathcal{C}$  について、次のいづれか一つ、しかも一つだけが成り立つ :
  - (I)  $\mathbf{a} \sim \mathbf{0} := (0, 0, 0, \dots)$  (即ち  $\bar{\mathbf{a}} = \bar{\mathbf{0}} = \iota(0)$ )
  - (II)  $\exists c \in Q : \exists N \in N : \forall n \geq N : a_n > c > 0$
  - (III)  $\exists c \in Q : \exists N \in N : \forall n \geq N : a_n < c < 0$
- (2)  $\mathbf{a} \sim \mathbf{a}'$  (即ち  $\bar{\mathbf{a}} = \bar{\mathbf{a}'}$ ) ならば、上のうちでどれが成り立つかが一致することを示せ。
- (3)  $\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}} \in R$  に対し、次で関係  $<, >$  を定めると well-defined である :
  - $\bar{\mathbf{a}} < \bar{\mathbf{b}} \iff \mathbf{a} - \mathbf{b}$  が type(III)
  - $\bar{\mathbf{a}} > \bar{\mathbf{b}} \iff \mathbf{a} - \mathbf{b}$  が type(II)
- (4) 上で定めた  $R$  上の関係  $<, >$  は次を満たす :
  - (a)  $\forall x, y \in R$  に対し  $x < y, x = y, x > y$  のうち一つ、かつ一つのみが成り立つ。
  - (b)  $\forall x, y, z \in R : x < y, y < z \implies x < z$
- (5) この関係は  $R$  上の演算と同調する。即ち、
  - (a)  $\forall x, y, z \in R : x < y \implies x + z < y + z$
  - (b)  $\forall x, y, z \in R : x < y, z > 0 \implies x \cdot z < y \cdot z$
- (6)  $Q$  上の大小関係  $<$  との間で次を満たす :
  - $\forall a, b \in Q : a < b \iff \iota(a) < \iota(b)$

問 7-7D.  $\bar{\mathbf{a}} \in R$  に対し、 $\bar{\mathbf{a}} \neq \bar{\mathbf{0}}$  ならば、 $\bar{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{b}} = \bar{\mathbf{1}}$  ( $= \iota(1)$ ) となる  $\bar{\mathbf{b}} \in R$  が存在することを示せ。

問 7-8D.  $Q$  内の数列  $\mathbf{a} = (a_n)_{n=0}^{\infty}$  について、 $a_n \rightarrow \alpha \in Q$  であるとき、 $R$  内でも  $\iota(a_n) \rightarrow \iota(\alpha)$  となることを示せ。

問 7-9D.  $R$  内の Cauchy 列は、 $R$  内で収束することを示せ。

---

### 期末試験について

- 期日：期末試験期間中に行なう予定 (詳細は後日発表)
- 内容：授業で取り上げた内容のうちで、基本的な概念の理解や簡単な証明 (適切な書き方も含む) について。期間中の演習課題も範囲に含まれる。授業時に講義した証明の難しい部分については試験で問うに適切な範囲を超えるが、それを理解しようと取り組んだことは、基本的な概念の理解や証明の書き方の練習となり、試験に臨む準備となるだろう。