

## 2016年度秋期 現代数学B(GSE40600) 期末試験(担当:角皆)

実施:2017年1月27日(金), 13:30 ~ 14:30, 2-409 教室 持込:不可

### 一般的な諸注意

- 下記をはじめとする期末試験の一般的注意に順うこと。
- 学生証または「臨時学生証(定期試験用)」を机の上に提示すること。
- 机の上に出してよい物は、学生証の他に筆記用具・下敷(白色かそれに近いもので無地)・時計(電卓機能等のないもの)のみ。
- ノート・プリント・参考書等の参照不可。計算機の使用不可。
- 携帯電話等は電源を切って鞆の中に入れておくこと。くれぐれも鳴らさないこと。時計としての使用も不可。
- 不正の疑いを招く行為は慎むこと。
- 試験開始の指示があるまでは、問題用紙のこの面を上にしておくこと。
- 試験開始後、まづ初めに、この面の記入欄に学生番号・名前をボールペン・サインペン等で記入すること。問題の書いてある面の記入欄にも記入すること(鉛筆でも可)。
- 問題文中に回答欄の指定のある問題については、解答欄に解答を記入すること。
- 問題文中に回答欄の指定がなく、この面に解答場所の指定のある問題については、この面の指定の場所に解答を記入すること。
- 試験時間が終了したら直ちに解答を終了して筆記用具を置き、その後で指示に順って答案を提出すること。
- 採点者が読めない答案・意図が伝わらない答案では採点できない。

### 解答に関する数学的な諸注意

- 本試験では基本的に、実数全体の集合  $R$  は、従来素朴に知っているものとして(有理数体  $Q$  を含み、しかるべき公理を満たす順序体として)考えてよい。
- その他、問題の設定に順って、しかるべく解答せよ。

学生番号： \_\_\_\_\_ 氏名： \_\_\_\_\_

**5**

(1)

(2)

---

**6**

(1)

(2)

1 Peano の公理系に基づいて、自然数の集合  $N$  に於ける加法  $+$  を次で定める：

- $n + 0 := n$
- $n + m' := (n + m)'$

以下は、 $N$  に於ける加法  $+$  が可換律「 $\forall a, b \in N : a + b = b + a$ 」を満たすことの証明である。番号付の等号に対してその根拠を選択肢より答えよ。

補題 1.  $\forall x \in N : 0 + x = x$

証明 .  $x$  についての帰納法で示す。

$x = 0$  に対し、

$$0 + 0 \stackrel{(1)}{=} 0 \quad (1) : \quad \boxed{\phantom{0}}$$

より成立。

$x$  について成立するとすると、 $x'$  に対し、

$$0 + x' \stackrel{(2)}{=} (0 + x)' \quad (2) : \quad \boxed{\phantom{0}}$$

$$\stackrel{(3)}{=} x' \quad (3) : \quad \boxed{\phantom{0}}$$

より成立。以上より帰納法完結。

補題 2.  $\forall x, y \in N : x' + y = (x + y)'$

証明 .  $y$  についての帰納法で示す。

$y = 0$  に対し、

$$x' + 0 \stackrel{(4)}{=} x' \quad (4) : \quad \boxed{\phantom{0}}$$

$$\stackrel{(5)}{=} (x + 0)' \quad (5) : \quad \boxed{\phantom{0}}$$

より成立。

$y$  について成立するとすると、 $y'$  に対し、

$$x' + y' \stackrel{(6)}{=} (x' + y)' \quad (6) : \quad \boxed{\phantom{0}}$$

$$\stackrel{(7)}{=} ((x + y)')' \quad (7) : \quad \boxed{\phantom{0}}$$

$$\stackrel{(8)}{=} (x + y)' \quad (8) : \quad \boxed{\phantom{0}}$$

より成立。以上より帰納法完結。

(左下より)

以上の準備の下に、可換律の証明に入る。

$b$  についての帰納法で示す。

$b = 0$  に対し、

$$a + 0 \stackrel{(9)}{=} a \quad (9) : \quad \boxed{\phantom{0}}$$

$$\stackrel{(10)}{=} 0 + a \quad (10) : \quad \boxed{\phantom{0}}$$

より成立。

$b$  について成立するとすると、 $b'$  に対し、

$$a + b' \stackrel{(11)}{=} (a + b)' \quad (11) : \quad \boxed{\phantom{0}}$$

$$\stackrel{(12)}{=} (b + a)' \quad (12) : \quad \boxed{\phantom{0}}$$

$$\stackrel{(13)}{=} b' + a \quad (13) : \quad \boxed{\phantom{0}}$$

より成立。以上より帰納法完結。

(証明終)

選択肢：

- (a) 帰納法の仮定
- (b)  $+$  の定義のうち  $n + 0 := n$
- (c)  $+$  の定義のうち  $n + m' := (n + m)'$
- (d)  $N$  での  $+$  の可換律
- (e)  $N$  での  $+$  の結合律
- (f)  $0' = 1$
- (g) 補題 1
- (h) 補題 2

2 実数列  $a = (a_n)_{n=0}^{\infty}$  について、

(1)  $a$  が実数  $\alpha \in R$  に収束することを表す論理式を、式中の  $\boxed{\phantom{0}}$  に下記の  
 選択肢から適切な順番で補充することにより、完成させよ。

$$\boxed{\phantom{0}} : \boxed{\phantom{0}} : \boxed{\phantom{0}} : n \geq N \implies |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

選択肢： $\forall \varepsilon > 0, \exists \varepsilon > 0, \forall n \in N, \exists n \in N, \forall N \in N, \exists N \in N$

(2)  $a$  が Cauchy 列であることを数式・論理記号を用いて書き表せ。

(3) この否定「 $a$  が Cauchy 列でない」ということを数式・論理記号を用いて書き表せ。

学生番号： \_\_\_\_\_ 氏名： \_\_\_\_\_

3  $\mathbf{R}$  の次の部分集合  $X_i$  に対して、最大値・最小値・上限・下限がそれぞれ存在するか。存在するならその値を解答欄に記せ。存在しないなら「なし」と記せ。

R の部分集合	最大値	最小値	上限	下限
$X_1 = [-4, 3)$ $= \{x \in \mathbf{R} \mid -4 \leq x < 3\}$				
$X_2 = \left\{ \frac{1}{n} \mid n = 1, 2, 3, \dots \right\}$				
$X_3 = \{x \in \mathbf{Q} \mid x^2 \leq 3\}$				

4 (裏面の指定場所に記述せよ。) 実数列  $\mathbf{a} = (a_n)_{n=0}^\infty, \mathbf{b} = (b_n)_{n=0}^\infty$  について、

$$a_n \rightarrow \alpha, b_n \rightarrow \beta \text{ ならば } a_n + b_n \rightarrow \alpha + \beta$$

であることを ( $\varepsilon$ - $N$  流で) 示せ。

5 (裏面の指定場所に記述せよ。)  $\sqrt{5}$  は無理数 (即ち、 $\sqrt{5} \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ ) である。

- (1)  $\sqrt{5}$  に収束する有理 Cauchy 列 (各項が有理数である Cauchy 列) の例を挙げよ。
- (2)  $\mathbf{Q}$  の切断  $(A, B)$  で  $\sqrt{5}$  に対応するものを、無理数を用いずに記述せよ。

6 整数全体の集合  $\mathbf{Z}$  から有理数全体の集合  $\mathbf{Q}$  を以下のようにして構成したい。以下では、 $\mathbf{Z}$  の演算に関する諸々の法則は既知とし、 $\mathbf{Q}$  に関しては未知とする。文中の

に補充して完成させた上で、証明を裏面の指定場所に記述せよ。

- (1) 集合  $X := \mathbf{Z} \times (\mathbf{Z} \setminus \{0\})$  上の関係  $\sim$  を次で定める：  
 $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in X$  に対して、

$$(a_1, b_1) \sim (a_2, b_2) \iff$$

このとき、 $\sim$  は  $X$  上の同値関係となる。特にそのうち推移律の証明を記述せよ。  
 (注意： $\mathbf{Z}$  の乗法に関する消約律「 $a, b, c \in \mathbf{Z}, a \neq 0$  のとき  $ab = ac \implies b = c$ 」を用いる必要がある。証明中でこれを用いた部分を明記せよ。)

- (2)  $\mathbf{Q} := X / \sim$  とし、 $(a, b) \in X$  の属する同値類を  $a/b \in \mathbf{Q}$  と書く。このとき、

$$a_1/b_1 + a_2/b_2 :=$$

により、 $\mathbf{Q}$  上の演算  $+$  :  $\mathbf{Q} \times \mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{Q}$  が well-defined に定まることを示したい。  
 このとき、示すべきことは、次のことである：

$$\begin{cases} a_1/b_1 = a'_1/b'_1 \\ a_2/b_2 = a'_2/b'_2 \end{cases} \implies$$

このことの証明を記述せよ。