

## 有限オートマトンでの計算可能性問題

- 言語  $A \subset \Sigma^*$  に対し、  
     $A$  を認識する有限オートマトン  $M$   
        が存在するか？
- 有限オートマトンによって  
    認識可能な言語はどのようなものか？

定理：

$L$  : 正規言語



$L$  が或る有限オートマトンで認識される

## 有限オートマトンでの計算可能性問題

- 言語  $A \subset \Sigma^*$  に対し、  
A を認識する有限オートマトン  $M$   
が存在するか？
- 有限オートマトンによって  
認識可能な言語はどのようなものか？  
  
→ 正規言語・正規表現

有限オートマトンで認識できない言語が存在する！！  
( $\iff$  正規でない言語が存在する)

## 有限オートマトンでの計算可能性問題

- 言語  $A \subset \Sigma^*$  に対し、  
A を認識する有限オートマトン M  
が存在するか？
- 有限オートマトンによって  
認識可能な言語はどのようなものか？  
→ 正規言語・正規表現

有限オートマトンで認識できない言語が存在する !!  
( $\iff$  正規でない言語が存在する)

## 有限オートマトンでの計算可能性問題

有限オートマトンで認識できる

$\iff$  “待ち” が有限種類

$\ell_w : \Sigma^* \longrightarrow \Sigma^*$  : “左平行移動”

$$v \longmapsto wv$$

言語  $L \in \mathcal{P}(\Sigma^*)$  に対し、

$S_L : \Sigma^* \longrightarrow \mathcal{P}(\Sigma^*)$  : “待ち” の集合

$$w \longmapsto \{v \in \Sigma^* \mid wv \in L\} = \ell_w^{-1}(L)$$

$$\#\text{Im}S_L < \infty \iff \exists M : L = L(M)$$

## 有限オートマトンでの計算可能性問題

有限オートマトンで認識できる

$\iff$  “待ち” が有限種類

$\ell_w : \Sigma^* \longrightarrow \Sigma^* : \text{“左平行移動”}$

$$v \longmapsto wv$$

言語  $L \in \mathcal{P}(\Sigma^*)$  に対し、

$S_L : \Sigma^* \longrightarrow \mathcal{P}(\Sigma^*) : \text{“待ち” の集合}$

$$w \longmapsto \{v \in \Sigma^* \mid wv \in L\} = \ell_w^{-1}(L)$$

$$\#\text{Im}S_L < \infty \iff \exists M : L = L(M)$$

## 有限オートマトンでの計算可能性問題

有限オートマトンで認識できない言語が存在する !!  
( $\iff$  正規でない言語が存在する)

例:  $A = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$  (a と b との個数が同じ)  
実際  $w_n = a^n b$  に対する  $S_L(w_n)$  が全て異なる

一般には、証明には部屋割り論法  
(の一種の pumping lemma)  
を利用することが多い

## 有限オートマトンでの計算可能性問題

有限オートマトンで認識できない言語が存在する !!  
( $\iff$  正規でない言語が存在する)

例:  $A = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$  (a と b との個数が同じ)  
実際  $w_n = a^n b$  に対する  $S_L(w_n)$  が全て異なる

一般には、証明には部屋割り論法  
(の一種の pumping lemma)  
を利用することが多い

## 有限オートマトンでの計算可能性問題

有限オートマトンで認識できない言語が存在する !!  
( $\iff$  正規でない言語が存在する)

例:  $A = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$  (a と b との個数が同じ)  
実際  $w_n = a^n b$  に対する  $S_L(w_n)$  が全て異なる

一般には、証明には部屋割り論法  
(の一種の pumping lemma)  
を利用することが多い



## 有限オートマトンでの計算可能性問題

有限オートマトンで認識できない言語が存在する !!  
( $\iff$  正規でない言語が存在する)

例:  $A = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$  (a と b との個数が同じ)  
実際  $w_n = a^n b$  に対する  $S_L(w_n)$  が全て異なる

一般には、証明には部屋割り論法  
(の一種の pumping lemma)  
を利用することが多い

## Pumping Lemma (注入補題・反復補題)

正規言語  $A \subset \Sigma^*$  に対し、

$\exists n \in \mathbb{N} :$

$\forall w \in A, |w| \geq n :$

$\exists x, y, z \in \Sigma^* : w = xyz$

(1)  $y \neq \varepsilon$

(2)  $|xy| \leq n$

(3)  $\forall k \geq 0 : xy^kz \in A$

## 有限オートマトンで認識できる / ない言語の例

$$\Sigma = \{a, b\}$$

- a と b との個数が同じ
- a が幾つか続いた後に b が幾つか続いたもの
- a, b が交互に並んで、a で始まり b で終わる
- 同じ文字列 2 回の繰返しから成る
- 回文 (palindrome)

などなど

このうちで、

有限オートマトンで認識できる言語は？

有限オートマトンで認識できない言語が存在する



より強力な計算モデルが必要



- プッシュダウンオートマトン
- チューリングマシン

有限オートマトンで認識できない言語が存在する



より強力な計算モデルが必要



- プッシュダウンオートマトン
- チューリングマシン

有限オートマトンで認識できない言語が存在する



有限オートマトンより強力な計算モデル



正規言語より広い範囲の言語を扱う



生成規則による言語の記述（生成文法）

有限オートマトンで認識できない言語が存在する



有限オートマトンより強力な計算モデル



正規言語より広い範囲の言語を扱う



生成規則による言語の記述（生成文法）

例：“文法に適っている”数式とは  
どのようなものか？

簡単のため二項演算子のみ考えることにすれば、

- 単独の文字（変数名）は式
- 式と式とを演算子で繋いだものは式
- 式を括弧で括ったものは式
- それだけ

→ これは式を作り出す規則とも考えられる



例：“文法に適っている”数式とは  
どのようなものか？

簡単のため二項演算子のみ考えることにすれば、

- 単独の文字（変数名）は式
- 式と式とを演算子で繋いだものは式
- 式を括弧で括ったものは式
- それだけ

→ これは式を作り出す規則とも考えられる

例：“文法に適っている”数式とは  
どのようなものか？

簡単のため二項演算子のみ考えることにすれば、

- 単独の文字（変数名）は式
- 式と式とを演算子で繋いだものは式
- 式を括弧で括ったものは式
- それだけ

→ これは式を作り出す規則とも考えられる