

本講義最後の話題は、

## 計算量

について

問題の難しさを如何に計るか？

## Church-Turing の提唱

「全てのアルゴリズム（計算手順）は、  
チューリングマシンで実装できる」

（アルゴリズムと呼べるのは  
チューリングマシンで実装できるものだけ）

… 「アルゴリズム」の定式化

## 計算量 (complexity)

- **時間計算量**：計算に掛かるステップ数  
(TM での計算の遷移の回数)
- **空間計算量**：計算に必要なメモリ量  
(TM での計算で使うテープの区画数)

通常は、決まった桁数の四則演算 1 回を  
1 ステップと数えることが多い

入力データ長  $n$  に対する  
増加のオーダー (Landau の  $O$ -記号) で表す

## Landau の $O$ -記号・ $o$ -記号

$f, g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$  に対し、

$$f = O(g) \iff \exists N > 0, \exists C > 0 : \forall n : \\ (n \geq N \implies f(n) \leq Cg(n))$$

$$f = o(g) \iff \frac{f(n)}{g(n)} \longrightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \\ \iff \forall \varepsilon > 0 : \exists N > 0 : \forall n : \\ (n \geq N \implies f(n) \leq \varepsilon g(n))$$

## 計算量 (complexity)

問題を解くアルゴリズムによって決まる

… アルゴリズムの計算量

→ アルゴリズムの効率 の評価

問題の計算量：

その問題を解くアルゴリズムの計算量の下限

最も効率良く解くと、どれ位で解けるか

= どうしてもどれ位必要か

= どれ位難しい問題か

→ 問題の難しさ の評価

## 基本的な例

- 加法 :  $O(n)$
  
- 乗法 :  $O(n^2)$  かと思いきや  $O(n \log n \log \log n)$   
(高速フーリエ変換 (FFT))

## 例：互除法

- 入力：正整数  $x, y$   
入力データ長：

$$n = \lceil \log_2 x \rceil + \lceil \log_2 y \rceil \sim \max\{\log x, \log y\}$$

- 出力：最大公約数  $d = \gcd(x, y)$

計算量の評価：

- 割算の回数： $O(n)$
  - 1回の割算：素朴な方法でも  $O(n^2)$   
(**FFT** を使えば  $O(n \log n \log \log n)$ )
- 併せて  $O(n^3)$  (**FFT** で  $O(n^2 \log n \log \log n)$ )
- … 十分に高速なアルゴリズム

## 重要な難しさのクラス

### 多項式時間 P $\dots \exists k : O(n^k)$

- “事実上計算可能” な難しさ
- 計算モデルの変更に関して頑健  
(複数テープ TM などに変更しても不変)

「しらみつぶし」が入ると  
大体  $O(2^n)$  程度以上になる (指数時間 EXP)  
“事実上計算不可能”



## 重要な難しさのクラス

多項式時間  $P \dots \exists k : O(n^k)$

- “事実上計算可能” な難しさ
- 計算モデルの変更に関して頑健  
(複数テープ TM などに変更しても不変)

「しらみつぶし」が入ると  
大体  $O(2^n)$  程度以上になる (指数時間 EXP)  
“事実上計算不可能”

## 重要な難しさのクラス

多項式時間 P  $\dots \exists k : O(n^k)$

- “事実上計算可能” な難しさ
- 計算モデルの変更に関して頑健  
(複数テープ TM などに変更しても不変)

「しらみつぶし」が入ると  
大体  $O(2^n)$  程度以上になる (指数時間 EXP)  
“事実上計算不可能”

## 例：素数判定 (PRIMES)

$n = \log_2 N$  :  $N$  の二進桁数

試行除算 (小さい方から割っていく) だと  
 $O(n^k 2^{n/2})$  くらい掛かりそう

実は多項式時間で解ける !!

Agrawal-Kayal-Saxena

“PRIMES is in P” (2002)

(出版は

Ann. of Math. 160(2) (2004), 781-793.)

## 例：素数判定 (PRIMES)

$n = \log_2 N$  :  $N$  の二進桁数

試行除算 (小さい方から割っていく) だと  
 $O(n^k 2^{n/2})$  くらい掛かりそう

実は多項式時間で解ける !!

**Agrawal-Kayal-Saxena**

**“PRIMES is in P” (2002)**

(出版は

**Ann. of Math. 160(2) (2004), 781-793.)**

## 素数判定と素因数分解との違い

このような効率の良い素数判定は、  
具体的に素因数を見付けている訳ではない

素因数分解は  $P$  であるかどうか未解決  
(多項式時間アルゴリズムが知られていない)

現状で知られているのは、  
“準指数時間”  $L_N[u, v]$  ( $0 < u < 1$ )  
のアルゴリズム  
(現時点で最高速なのは  $u = 1/3$ )

## 素数判定と素因数分解との違い

このような効率の良い素数判定は、  
具体的に素因数を見付けている訳ではない

素因数分解は P であるかどうか未解決  
(多項式時間アルゴリズムが知られていない)

現状で知られているのは、  
“準指数時間”  $L_N[u, v]$  ( $0 < u < 1$ )  
のアルゴリズム  
(現時点で最高速なのは  $u = 1/3$ )

素因数分解アルゴリズム等の計算量を表すのに

$$L_N[u, v] := \exp(v(\log N)^u (\log \log N)^{1-u})$$

が良く用いられる

$n = \log N$  ( $N$  の桁数) とおくと、

- $L_N[0, v] = e^{v \log \log N} = n^v$  : 多項式時間
- $L_N[1, v] = e^{v \log N} = e^{vn}$  : 指数時間

## 代表的な素因数分解法

- $(p - 1)$ -法
- 楕円曲線法 (Elliptic Curve Method)
- 二次篩法 (Quadratic Sieve)
- 数体篩法 (Number Field Sieve)



## 二次篩法の原理

$y^2 \equiv z^2 \pmod{N}$  となる  $y, z$  を探す

→  $y^2 - z^2 = (y - z)(y + z)$  が  $N$  で割切れる

$y \equiv \pm z \pmod{N}$  でない限り、

$\gcd(y \pm z, N)$  が  $N$  の非自明な約数 !!

注：最大公約数は高速に計算可能（互除法）

## 二次篩法の原理

$y^2 \equiv z^2 \pmod{N}$  となる  $y, z$  を探す

→  $y^2 - z^2 = (y - z)(y + z)$  が  $N$  で割切れる

$y \equiv \pm z \pmod{N}$  でない限り、

$\gcd(y \pm z, N)$  が  $N$  の非自明な約数 !!

注：最大公約数は高速に計算可能（互除法）

## 二次篩法の原理

$y^2 \equiv z^2 \pmod{N}$  となる  $y, z$  を探す

→  $y^2 - z^2 = (y - z)(y + z)$  が  $N$  で割切れる

$y \equiv \pm z \pmod{N}$  でない限り、

$\gcd(y \pm z, N)$  が  $N$  の非自明な約数 !!

注：最大公約数は高速に計算可能（[互除法](#)）

## 二次篩法の原理

$y^2 \equiv z^2 \pmod{N}$  なる  $y, z$  の組を見付けるには？

→  $x$  を沢山取って、

$x^2$  を  $N$  で割った余り  $r$  を沢山作る

$$x^2 \equiv r \pmod{N}$$

→  $r = z^2$  なら  $y = x$  で **OK**

そんなにうまくいくのか？

•  $x$  を  $\sqrt{N}$  の近くにとって、

$x^2 - N$  が小さくなるようにする

• それを組み合わせて (掛け合わせて)

うまく作れることがある

## 二次篩法の原理

$y^2 \equiv z^2 \pmod{N}$  なる  $y, z$  の組を見付けるには？

→  $x$  を沢山取って、

$x^2$  を  $N$  で割った余り  $r$  を沢山作る

$$x^2 \equiv r \pmod{N}$$

→  $r = z^2$  なら  $y = x$  で **OK**

そんなにうまくいくのか？

- $x$  を  $\sqrt{N}$  の近くにとって、  
 $x^2 - N$  が小さくなるようにする
- それを組み合わせて（掛け合わせて）  
うまく作れることがある

## 二次篩法の原理

$y^2 \equiv z^2 \pmod{N}$  なる  $y, z$  の組を見付けるには？

→  $x$  を沢山取って、

$x^2$  を  $N$  で割った余り  $r$  を沢山作る

$$x^2 \equiv r \pmod{N}$$

→  $r = z^2$  なら  $y = x$  で **OK**

そんなにうまくいくのか？

- $x$  を  $\sqrt{N}$  の近くにとって、  
 $x^2 - N$  が小さくなるようにする
- それを組み合わせる (掛け合わせる)  
うまく作れることがある

## 二次篩法の原理

$y^2 \equiv z^2 \pmod{N}$  なる  $y, z$  の組を見付けるには？

→  $x$  を沢山取って、

$x^2$  を  $N$  で割った余り  $r$  を沢山作る

$$x^2 \equiv r \pmod{N}$$

→  $r = z^2$  なら  $y = x$  で **OK**

そんなにうまくいくのか？

- $x$  を  $\sqrt{N}$  の近くにとり、

$x^2 - N$  が小さくなるようにする

- それを組み合わせて（掛け合わせて）

うまく作れることがある

$$\text{例 : } N = 18281, \quad \left[ \sqrt{18281} \right] = 135$$

$$145^2 \equiv 2744 = 2^3 \cdot 7^3$$

$$149^2 \equiv 3920 = 2^4 \cdot 5^1 \cdot 7^2$$

$$159^2 \equiv 7000 = 2^3 \cdot 5^3 \cdot 7^1$$

---

$$(145 \cdot 149 \cdot 159)^2 \equiv 2^{10} \cdot 5^4 \cdot 7^6$$

$$\equiv (2^5 \cdot 5^2 \cdot 7^3)^2$$

$$145 \cdot 149 \cdot 159 \equiv 16648 =: y$$

$$2^5 \cdot 5^2 \cdot 7^3 \equiv 185 =: z$$

$$\text{gcd}(y - z, N) = 101$$

:  $N = 18281$  の非自明な約数 !!



$$\text{例 : } N = 18281, \quad \left[ \sqrt{18281} \right] = 135$$

$$145^2 \equiv 2744 = 2^3 \cdot 7^3$$

$$149^2 \equiv 3920 = 2^4 \cdot 5^1 \cdot 7^2$$

$$159^2 \equiv 7000 = 2^3 \cdot 5^3 \cdot 7^1$$

---

$$(145 \cdot 149 \cdot 159)^2 \equiv 2^{10} \cdot 5^4 \cdot 7^6$$

$$\equiv (2^5 \cdot 5^2 \cdot 7^3)^2$$

$$145 \cdot 149 \cdot 159 \equiv 16648 =: y$$

$$2^5 \cdot 5^2 \cdot 7^3 \equiv 185 =: z$$

$$\text{gcd}(y - z, N) = 101$$

:  $N = 18281$  の非自明な約数 !!

$$\text{例 : } N = 18281, \quad \left[ \sqrt{18281} \right] = 135$$

$$145^2 \equiv 2744 = 2^3 \cdot 7^3$$

$$149^2 \equiv 3920 = 2^4 \cdot 5^1 \cdot 7^2$$

$$159^2 \equiv 7000 = 2^3 \cdot 5^3 \cdot 7^1$$

---

$$\begin{aligned} (145 \cdot 149 \cdot 159)^2 &\equiv 2^{10} \cdot 5^4 \cdot 7^6 \\ &\equiv (2^5 \cdot 5^2 \cdot 7^3)^2 \end{aligned}$$

$$145 \cdot 149 \cdot 159 \equiv 16648 =: y$$

$$2^5 \cdot 5^2 \cdot 7^3 \equiv 185 =: z$$

$$\text{gcd}(y - z, N) = 101$$

:  $N = 18281$  の非自明な約数 !!

## 二次篩法の原理

うまく組み合わせるには、

$x^2$  を  $N$  で割った余りの

素因数の重なりが多いと良い

- 始めに小さい素数を幾つか決めておく（因子底）
- $x^2$  を  $N$  で割った余り  $r$  で、  
素因数が因子底の素数のみから成るものを貯める
- 必要なだけ貯ったら、  
平方数を作る組合せを探す計算に移行

## 二次篩法の原理

うまく組み合わせるには、

$x^2$  を  $N$  で割った余りの

素因数の重なりが多いと良い

- 始めに小さい素数を幾つか決めておく（**因子底**）
- $x^2$  を  $N$  で割った余り  $r$  で、  
素因数が因子底の素数のみから成るものを貯める
- 必要なだけ貯ったら、  
平方数を作る組合せを探す計算に移行

## 何が「篩」か？

候補の  $x$  を沢山計算するときに、  
採用され易そうな候補  $x$  だけ選んで計算

$x^2 - N$  が因子底の幾つかで割れることが  
予め判っているものを選ぼう

或る  $x^2 - N$  が  $p$  で割れていたら、  
 $(x \pm p)^2 - N, (x \pm 2p)^2 - N, \dots$   
も  $p$  で割れることが予め判る !!

→ 因子底の素数毎に、  
候補に残り易そうな  $x$  が 等間隔に並ぶ

→ 「篩法」

## 何が「篩」か？

候補の  $x$  を沢山計算するときに、  
採用され易そうな候補  $x$  だけ選んで計算  
 $x^2 - N$  が因子底の幾つかで割れることが  
予め判っているものを選ぼう

或る  $x^2 - N$  が  $p$  で割れていたら、  
 $(x \pm p)^2 - N, (x \pm 2p)^2 - N, \dots$   
も  $p$  で割れることが予め判る !!

→ 因子底の素数毎に、  
候補に残り易そうな  $x$  が 等間隔に並ぶ

→ 「篩法」

## 何が「篩」か？

候補の  $x$  を沢山計算するときに、  
採用され易そうな候補  $x$  だけ選んで計算

$x^2 - N$  が因子底の幾つかで割れることが  
予め判っているものを選ぼう

或る  $x^2 - N$  が  $p$  で割れていたら、  
 $(x \pm p)^2 - N, (x \pm 2p)^2 - N, \dots$   
も  $p$  で割れることが予め判る !!

→ 因子底の素数毎に、  
候補に残り易そうな  $x$  が 等間隔に並ぶ

→ 「篩法」

## 何が「篩」か？

候補の  $x$  を沢山計算するときに、  
採用され易そうな候補  $x$  だけ選んで計算

$x^2 - N$  が因子底の幾つかで割れることが  
予め判っているものを選ぼう

或る  $x^2 - N$  が  $p$  で割れていたら、  
 $(x \pm p)^2 - N, (x \pm 2p)^2 - N, \dots$   
も  $p$  で割れることが予め判る !!

→ 因子底の素数毎に、  
候補に残り易そうな  $x$  が 等間隔に並ぶ

→ 「篩法」



## 計算困難な問題の数理技術としての利用

素因数分解の困難さを利用した暗号方式

… **RSA 暗号** (Rivest-Shamir-Adleman)

鍵となる整数  $n$  の素因数分解を

知っていれば解読できるが、  
知らないとは解読できない

→ 詳しくは暗号理論などの授業で

## 計算困難な問題の数理技術としての利用

素因数分解の困難さを利用した暗号方式

… **RSA 暗号 (Rivest-Shamir-Adleman)**

鍵となる整数  $n$  の素因数分解を

知っていれば解読できるが、  
知らないとは解読できない

→ 詳しくは暗号理論などの授業で

## 例：巨大な指数の冪の計算

**RSA** 暗号では、次の計算が必要になる：

$$C \equiv M^e \pmod{N}$$

ここで、 $C, M, e, N$  はどれも数百桁程度  
(500 ~ 1000 **bit**)

単純に  $M$  を  $e$  回掛けるのでは、  
数百桁回の乗算（と  $\text{mod } N$  の計算）が必要  
→ 事実上不可能（指数時間）

計算を実行するには高速化の工夫が必要

## 例：巨大な指数の冪の計算

**RSA** 暗号では、次の計算が必要になる：

$$C \equiv M^e \pmod{N}$$

ここで、 $C, M, e, N$  はどれも数百桁程度  
(500 ~ 1000 **bit**)

単純に  $M$  を  $e$  回掛けるのでは、  
数百桁回の乗算（と  $\text{mod } N$  の計算）が必要  
→ 事実上不可能（指数時間）

計算を実行するには高速化の工夫が必要

## 例：巨大な指数の冪の計算

RSA 暗号では、次の計算が必要になる：

$$C \equiv M^e \pmod{N}$$

ここで、 $C, M, e, N$  はどれも数百桁程度  
(500 ~ 1000 bit)

単純に  $M$  を  $e$  回掛けるのでは、  
数百桁回の乗算（と mod  $N$  の計算）が必要  
→ 事実上不可能（指数時間）

計算を実行するには高速化の工夫が必要

## 例：巨大な指数の冪の計算 ( $M^e$ の高速計算)

$$e = e_0 + e_1 \cdot 2 + e_2 \cdot 2^2 + \cdots + e_{n-1} \cdot 2^{n-1} + e_n \cdot 2^n$$

：  $e$  の二進法表示 (二進  $n$  桁、 $e_i = 0, 1$ )

$M^{2^k}$  は、次の漸化式で、 $k$  回の乗算で計算できる

- $M^{2^0} = M$
- $M^{2^{k+1}} = (M^{2^k})^2$

$M^e$  は、

$$M^e = \prod_{k=0}^n (M^{2^k})^{e_k} = \prod_{k: e_k=1} M^{2^k}$$

により、 $O(n)$  回の乗算で計算できる (多項式時間)

## 例：巨大な指数の冪の計算 ( $M^e$ の高速計算)

$$e = e_0 + e_1 \cdot 2 + e_2 \cdot 2^2 + \cdots + e_{n-1} \cdot 2^{n-1} + e_n \cdot 2^n$$

:  $e$  の二進法表示 (二進  $n$  桁、 $e_i = 0, 1$ )

$M^{2^k}$  は、次の漸化式で、 $k$  回の乗算で計算できる

- $M^{2^0} = M$
- $M^{2^{k+1}} = (M^{2^k})^2$

$M^e$  は、

$$M^e = \prod_{k=0}^n (M^{2^k})^{e_k} = \prod_{k: e_k=1} M^{2^k}$$

により、 $O(n)$  回の乗算で計算できる (多項式時間)

## 例：巨大な指数の冪の計算 ( $M^e$ の高速計算)

$$e = e_0 + e_1 \cdot 2 + e_2 \cdot 2^2 + \cdots + e_{n-1} \cdot 2^{n-1} + e_n \cdot 2^n$$

：  $e$  の二進法表示 (二進  $n$  桁、 $e_i = 0, 1$ )

$M^{2^k}$  は、次の漸化式で、 $k$  回の乗算で計算できる

- $M^{2^0} = M$
- $M^{2^{k+1}} = (M^{2^k})^2$

$M^e$  は、

$$M^e = \prod_{k=0}^n (M^{2^k})^{e_k} = \prod_{k: e_k=1} M^{2^k}$$

により、 $O(n)$  回の乗算で計算できる (多項式時間)



## 例：並べ替え (sorting)

多くの数値データを大きさの順に並べ替える操作

$n$  個のデータの比較は  $\frac{n(n-1)}{2}$  通り

→ 全ての組合せを比較しても  $O(n^2)$  で済む筈

- 具体的なアルゴリズムは？
- もっと早くなる？ ( $O(n^2)$  になる？)

## 例：並べ替え (sorting)

多くの数値データを大きさの順に並べ替える操作

$n$  個のデータの比較は  $\frac{n(n-1)}{2}$  通り

→ 全ての組合せを比較しても  $O(n^2)$  で済む筈

- 具体的なアルゴリズムは？
- もっと早くなる？ ( $o(n^2)$  になる？)

## 例：並べ替え (sorting)

多くの数値データを大きさの順に並べ替える操作

$n$  個のデータの比較は  $\frac{n(n-1)}{2}$  通り

→ 全ての組合せを比較しても  $O(n^2)$  で済む筈

- 具体的なアルゴリズムは？
- もっと早くなる？ ( $O(n^2)$  になる？)

## 並べ替えの例：バブルソート

- 端から順に、隣と比べて逆順なら入れ換える  
(末尾が決まる)
  
- (末尾を除いて)これを繰り返す

比較回数： $\frac{n(n-1)}{2}$  回  $\longrightarrow$  計算量  $O(n^2)$

## 並べ替えの例：バブルソート

- 端から順に、隣と比べて逆順なら入れ換える  
(末尾が決まる)
- (末尾を除いて)これを繰り返す

比較回数： $\frac{n(n-1)}{2}$  回  $\longrightarrow$  計算量  $O(n^2)$

## 並べ替えの例：マージソート

- 半分に分ける
- それぞれをソートする（分割統治）
- 両者を併せる

「それぞれをソート」の部分は再帰を用いる

計算量は？

## 並べ替えの例：マージソート

- 半分に分ける
- それぞれをソートする（分割統治）
- 両者を併せる

「それぞれをソート」の部分は再帰を用いる

計算量は？

## 並べ替えの例：マージソート

- 半分に分ける
- それぞれをソートする（分割統治）
- 両者を併せる

「それぞれをソート」の部分は再帰を用いる

計算量は？



## 並べ替えの例：マージソート

- 半分に分ける
- それぞれをソートする
- 両者を併せる → 計算量は  $O(n)$

計算量を  $f(n)$  とすると、

$$f(n) = 2f\left(\frac{n}{2}\right) + O(n)$$

$$\longrightarrow f(n) = O(n \log n)$$

## 並べ替えの例：マージソート

- 半分に分ける
- それぞれをソートする
- 両者を併せる → 計算量は  $O(n)$

計算量を  $f(n)$  とすると、

$$f(n) = 2f\left(\frac{n}{2}\right) + O(n)$$

$$\longrightarrow f(n) = O(n \log n)$$

## 並べ替えの例：マージソート

- 半分に分ける
- それぞれをソートする
- 両者を併せる → 計算量は  $O(n)$

計算量を  $f(n)$  とすると、

$$f(n) = 2f\left(\frac{n}{2}\right) + O(n)$$

$$\longrightarrow f(n) = O(n \log n)$$

## 最悪計算量と平均計算量

計算量の理論では、入力データに対して

「どんな場合でも（最悪でも）これだけで出来る」

というのが計算量の定義（最悪計算量）だが、

実際に計算するには、ランダムなデータに対して

「平均的にはこれだけで出来る」

というのも重要である（平均計算量）

## 並べ替えの例：クイックソート

- 基準値 (pivot) を選ぶ
- それより大きい値と小さい値とに分ける
- それぞれをソートする (分割統治)

計算量は

- 最悪では  $O(n^2)$  にしかない
- しかし平均では  $O(n \log n)$  で、  
多くの場合、実際にはその中でもかなり速い

## 並べ替えの例：クイックソート

- 基準値 (pivot) を選ぶ
- それより大きい値と小さい値とに分ける
- それぞれをソートする (分割統治)

計算量は

- 最悪では  $O(n^2)$  にしかない
- しかし平均では  $O(n \log n)$  で、  
多くの場合、実際にはその中でもかなり速い

## 並べ替えの例：挿入ソート

実際に扱うデータはランダムとは限らない

ソート済みデータに変更があった場合など、  
殆どソートされているデータに対して速い方法

- それまでのデータをソートしておく
- 次のデータを適切な場所に挿入する

最悪計算量は  $O(n^2)$  だが、場合によっては使える

## 並べ替えの例：挿入ソート

実際に扱うデータはランダムとは限らない

ソート済みデータに変更があった場合など、  
殆どソートされているデータに対して速い方法

- それまでのデータをソートしておく
- 次のデータを適切な場所に挿入する

最悪計算量は  $O(n^2)$  だが、場合によっては使える



## 並べ替えの例：挿入ソート

実際に扱うデータはランダムとは限らない

ソート済みデータに変更があった場合など、  
殆どソートされているデータに対して速い方法

- それまでのデータをソートしておく
- 次のデータを適切な場所に挿入する

最悪計算量は  $O(n^2)$  だが、場合によっては使える