3. 級数和の収束と発散 (05/19)

次回演習までの答案の採点・添削・返却が難しいのと、不整理で読みにくい答案が多いので、今後は問題は一旦各自のノートに解き、そのうち所定の（B を付した）問題 $+\alpha$ を、配布する答案用紙に清書して提出することとする。提出分の問題については次の回に補足解説をすることがあるが、その際は各自で自分が解いたノートの答案を参照せよ。提出した答案は授業時には返却しないので、返却希望者は別途申し出よ。

3-13A.　次の関数の Taylor 展開を求めよ。

(1) $\sin x \cos x$　　(2) $\dfrac{1}{6-5x+x^2}$

3-14B.　次の関数の Taylor 展開を次の二通りの方法で x^4 の項まで（意欲があればもっと）求めよ。（結果を比較して確認せよ。）

(1) $e^{x+x^2} = \exp(x+x^2)$
　(a) e^t の Taylor 展開に $t = x+x^2$ を代入して
　(b) $e^{x+x^2} = e^x e^{x^2}$ と見て、それぞれの Taylor 展開の掛け算で

(2) $\dfrac{1}{1-x-x^2}$
　(a) 筆算方式の割り算で
　(b) $1-x-x^2$ を因数分解して、等比級数の和に展開して

3-15C.　次の関数の Taylor 展開を x^7 の項まで（意欲があればもっと）求めよ。

(1) $\sin^2 x$　　(2) $\cos^2 x$　　(3) $\dfrac{1}{\cos x}$

3-16A.　次の級数の収束・発散を判定せよ。

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-1}{n^2+n+2016}$　　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+2016}{n^2}$　　(3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{2016}}{2^n}$

3-17B.　次の級数の収束・発散を判定せよ。

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n}+1}$　　(2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2016}{n^3}$　　(3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+2016}{3^n}$

（結果のみでも良いが、その場合は、次の例のような級数のうち、どのような級数と収束・発散を共にするとして判定したかを明記せよ。

例：$\displaystyle\sum \frac{1}{n},\quad \sum \frac{1}{n^{1.5}},\quad \sum \frac{1}{n^2},\quad \sum \frac{1}{n^3},\quad \sum \frac{1}{2^n},\quad \sum \frac{1}{3^n},\quad \sum \left(\frac{2}{3}\right)^n$ など）

3-18C.　級数 $\displaystyle S = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\log n}$ の収束・発散を判定したい。

(1) $(\log\log x)' = $ ？

(2) 関数 $\dfrac{1}{x\log x}$ の積分と級数 S との比較により、級数 S の収束・発散を判定せよ。

3-19B.　次の冪級数の収束半径を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n5^n}$　　(2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n3^n x^n$　　(3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!}x^n$

3-20C.　級数 $\displaystyle S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ について、部分和を $\displaystyle S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}$ とおく。

(1) 積分 $\displaystyle\int_1^N \frac{1}{x^2}dx$ を用いて S_N を上から評価することにより、級数 S が収束することを示せ。

(2) $n \geq 2$ に対して $\dfrac{1}{n^2} < \dfrac{1}{n(n-1)} = \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}$ であることを用いて、S_N を上から評価することにより、級数 S が収束することを示せ。