5. 逆三角関数などの新しい関数 (06/16)

5-28A.　次の値を（主値で）答えよ。

(1) $\arcsin\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$　　(2) $\arctan 1$

5-29B.　次の値を主値で答えよ。但し、主値の範囲は、それぞれ $-\dfrac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \dfrac{\pi}{2}$, $0 \leq \arccos x \leq \pi, -\dfrac{\pi}{2} \leq \arctan x \leq \dfrac{\pi}{2}$ に取ることとする。

(1) $\arcsin\dfrac{1}{2}$　　(2) $\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$　　(3) $\arctan(-\sqrt{3})$

5-30B.　a を $|a| < 1$ なる実数とするとき、$x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0, x \geq a$ で定まる領域の面積を求めよ。

5-31B.　$y = \arcsin x = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ の不定積分 $\displaystyle\int \arcsin x\, dx$ を求めよ。（ヒント：$\arcsin x = (x)' \arcsin x$ と見て部分積分）

5-32C.　定積分

$$I(a) = \int_0^a \arcsin x\, dx$$

$(0 \leq a \leq 1)$ を上問のヒントと別の方法で考えてみよう。

長方形領域 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq \arcsin a\}$ は $y = \arcsin x$ のグラフによって 2 つの領域に分かれる。この各領域の面積を考えることによって、$I(a)$ を求めよ。

5-33A.　次で定義される関数を、それぞれ双曲正弦 (hyperbolic sine)・双曲余弦 (hyperbolic cosine)・双曲正接 (hyperbolic tangent) という：

$$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \tanh x := \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

（総称して双曲線関数という。）

(1) 次の関係式を満たすことを示せ。
  (a) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1, \tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x}$
  (b) $(\sinh x)' = \cosh x, (\cosh x)' = \sinh x$

(2) $\sinh x$ の Taylor 展開を、一般項と総和記号 $\sum$ を用いて表せ。

5-34B.　双曲線関数について、

(1) $\cosh x$ の Taylor 展開を、一般項と総和記号 $\sum$ を用いて表せ。
(2) $\tanh x$ の Taylor 展開を、x^5 の項まで（意欲があればもっと）求めよ。
(3) 次の加法定理を導け：
  (a) $\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$
  (b) $\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$
(4) $\tanh(x + y)$ を $\tanh x, \tanh y$ で表せ。（tanh の加法定理）

5-35C.　e^x の Taylor 展開において、形式的に x を ix（i は虚数単位、$i^2 = -1$）と置き換えた級数を考え、これを e^{ix} と書くことにする。

(1) 形式的に計算して実部・虚部に分けると、$e^{ix} = \cos x + i \sin x$ の形になることを確かめよ。（複素数まで拡げて収束・極限等の定式化を整備することにより、この関係式は正当化され、「Euler の公式」と呼ばれる。詳しくは、「複素関数論」の授業などで扱う。）

(2) 次の関係式が成り立つ：

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \tan x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{i(e^{ix} + e^{-ix})}$$

(3) 上の関係式と指数法則とから、三角関数の加法定理を導け。