6. 定積分の基礎づけと計算 (06/30)

6-36A.　閉区間 $I=[0,2]$ で定義された関数

$$f(x)=\begin{cases}1 & (x=1\text{ のとき})\\ 0 & (\text{それ以外})\end{cases}$$

を考える。区間 I の分割 $\Delta : 0=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=2$ に対し、各小区間 $I_i=[x_{i-1},x_i]$ について、$m_i:=\inf_{x\in I_i} f(x), M_i:=\sup_{x\in I_i} f(x)$ とおく。各小区間 I_i は $f(x)=0$ となる点 $x\in I_i$ を含むので、$m_i=0$ であり、従って、$s_\Delta:=\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i-x_{i-1})=0$ である。これより、下積分は $s:=\sup_{\Delta} s_\Delta=0$ である。一方、$x=1$ を含む小区間 $I_k=[x_{k-1},x_k]$ については、$M_k=1>0$ であり、従って、$S_\Delta:=\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i-x_{i-1})>0$ である。f が I で積分可能であることを言うには、上積分 $S:=\inf_{\Delta} S_\Delta=0$ であること、即ち、任意の $\varepsilon>0$ に対し、$S_\Delta\le\varepsilon$ なる分割 Δ が存在することを言わなくてはならない。

与えられた任意の $\varepsilon>0$ に対し、$S_\Delta\le\varepsilon$ なる分割 $\Delta=\Delta_\varepsilon$ を実際に与えることによって、このことを示せ。

6-37B.　$I=[0,1]$ で定義された関数

$$f(x)=\begin{cases}1 & (x=\frac{1}{3}\text{ のとき})\\ 2 & (x=\frac{2}{3}\text{ のとき})\\ 0 & (\text{それ以外})\end{cases}$$

を考える。上問と同様に、与えられた任意の $\varepsilon>0$ に対し、$S_\Delta\le\varepsilon$ なる分割 $\Delta=\Delta_\varepsilon$ を具体的に与えることによって、f が I で積分可能であることを示せ。

6-38C.　m を 1 以上の整数とする。$I=[0,1]$ で定義された関数

$$f(x)=\begin{cases}1 & (x=\frac{k}{m}\ (k=1,2,\ldots,m-1)\text{ のとき})\\ 0 & (\text{それ以外})\end{cases}$$

について、上問と同様にして、f が I で積分可能であることを示せ。

6-39D.　次で定める $I=[0,1]$ 上の関数 f は、I で積分可能であるか？

$$f(x)=\begin{cases}1 & (x=\frac{1}{n}\ (n\text{：正整数})\text{ のとき})\\ 0 & (\text{それ以外}).\end{cases}$$

6-40C.　有界閉区間 I で定義された有界な関数 f,g が、$\forall x\in I: f(x)\le g(x)$ を満たすとする。

(1) $\inf_{x\in I} f(x)\le\inf_{x\in I} g(x)$ であることを示せ。（ヒント：$\inf_{x\in I} f(x)$ が $g(x)$ の下界であることを示せば、下界の中での $\inf_{x\in I} g(x)$ の最大性から従う。）

(2) 区間 I の分割 $\Delta : 0=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=1$ に対し、f,g に対して上問のように定めた s_Δ を、関数を明記してそれぞれ $s_\Delta(f), s_\Delta(g)$ と書くことにする。このとき、$s_\Delta(f)\le s_\Delta(g)$ であることを示せ。（ヒント：各小区間 $I_i=[x_{i-1},x_i]$ について、前小問を適用せよ。）

(3) 各関数の下積分 $s(f), s(g)$ について、$s(f)\le s(g)$ であることを示せ。（ヒント：$s(g)$ が $s_\Delta(f)$ の上界であることを示せば、上界の中での $s(f)$ の最小性から従う。）

(4) f,g が共に I で積分可能であれば、$\int_I f(x)dx\le\int_I g(x)dx$ であることを示せ。（ヒント：上積分についても同様に考えて、併せよ。）

6-41C.　有界閉区間 I で定義された関数 f, g に対し、その和 $f+g$ を $(f+g)(x) := f(x)+g(x)$ で定義する。以下、f, g は I で有界であるとする。

(1) $\inf_{x\in I}(f+g)(x) \geq \inf_{x\in I} f(x) + \inf_{x\in I} g(x)$ であることを示せ。（ヒント：$\inf_{x\in I} f(x) + \inf_{x\in I} g(x)$ が $(f+g)(x)$ の下界であることを示せば、下界の中での $\inf_{x\in I}(f+g)(x)$ の最大性から従う。）

(2) 区間 I の分割 $\Delta : 0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = 1$ に対し、$f, g, f+g$ に対して上問のように定めた s_Δ を、関数を明記してそれぞれ $s_\Delta(f), s_\Delta(g), s_\Delta(f+g)$ と書くことにする。このとき、$s_\Delta(f+g) \geq s_\Delta(f) + s_\Delta(g)$ であることを示せ。（ヒント：各小区間 $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ について、前小問を適用せよ。）

(3) $\sup_\Delta(s_\Delta(f)+s_\Delta(g)) = s(f)+s(g)$ であることを示せ。（ヒント：形式的に進めても $\leq$ しか出ない。$\geq$ を示すには、$s(f)+s(g)$ が $s_\Delta(f)+s_\Delta(g)$ の最小の上界であること、即ち、任意の $\varepsilon > 0$ に対し、或る分割 Δ が存在して、$s_\Delta(f)+s_\Delta(g) \geq s(f)+s(g)-\varepsilon$ となることを示す必要がある。$s_\Delta(f), s_\Delta(g)$ の上界の中での $s(f), s(g)$ の最小性から、$s(f) - \dfrac{\varepsilon}{2}, s(g) - \dfrac{\varepsilon}{2}$ に対してしかるべき分割 Δ_1, Δ_2 を取り、それらの分点を併せた分割（共通細分）を考えよ。）

(4) 各関数の下積分 $s(f), s(g), s(f+g)$ について、$s(f+g) \geq s(f) + s(g)$ であることを示せ。（ヒント：$s(f+g)$ が $s_\Delta(f) + s_\Delta(g)$ の上界であることを示せば、上界の中での $\sup_\Delta(s_\Delta(f) + s_\Delta(g))$ の最小性と、前小問とを併せて従う。）

(5) 各関数の上積分 $S(f), S(g), S(f+g)$ について、$S(f+g) \leq S(f) + S(g)$ であることを示せ。（ヒント：下積分と同様に考えよ。）

(6) f, g が共に I で積分可能であれば、$f+g$ も I で積分可能であり、

$$\int_I (f+g)(x)dx = \int_I f(x)dx + \int_I g(x)dx$$

が成り立つことを示せ。

以下の問題では、微分積分学の基本定理を用いて、「不定積分＝原始関数」「定積分＝原始関数の区間両端での値の差」として（即ち、今までに馴染みの計算法に従って）考えて良い。

6-42A.　次の極限は？

(1) $\displaystyle\lim_{M\to+\infty}\int_1^M \frac{1}{x^2}dx$　　(2) $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^2}dx$

6-43B.　次の極限は？

(1) $\displaystyle\lim_{M\to+\infty}\int_1^M \frac{1}{\sqrt{x}}dx$　　(2) $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$

6-44B.　次の極限は？

(1) $\displaystyle\lim_{M\to+\infty}\int_0^M e^{-x}dx$　　(2) $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1 \log x dx$

（(2) のヒント：$\lim_{x\to+0} x\log x = 0$ を用いよ。）

6-45B.　0 以上の整数 k に対し、

$$I_k(M) := \int_0^M x^k e^{-x}dx$$

とおく。極限 $\lim_{M\to+\infty} I_k(M)$ が収束することを、k に関する帰納法で示し、極限値 $I_k := \lim_{M\to+\infty} I_k(M)$ に関する漸化式を求めよ。