7-46A. 次の広義積分の収束・発散を判定せよ。

(1) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x-1}{x^2+x+2016}dx$ (2) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sqrt{x}+2016}{x^2+1}dx$ (3) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x^{2016}}{e^x}dx$ (4) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{x}+1}{x}dx$

7-47B. 次の広義積分の収束・発散を判定せよ。

(1) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x+\sqrt{x}+1}dx$ (2) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x+2016}{x\sqrt{x}}dx$ (3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x+2016}{x\sqrt{x}}dx$

（結果のみでも良いが、その場合は、次の例のような広義積分のうち、どのような広義積分と収束・発散を共にするとして判定したかを明記せよ。

例：$\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx,\quad \int \frac{1}{x}dx,\quad \int \frac{1}{x\sqrt{x}}dx,\quad \int \frac{1}{x^2}dx,\quad \int \frac{1}{x^3}dx,\quad \int \frac{1}{e^x}dx$ など）

7-48B. e^{-x^2} の不定積分は初等関数では書き表せないが、定積分（広義積分）の値については、

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

であることが知られている。（統計でデータの分布を扱うときに現れる積分で、2 変数関数の積分の変数変換を利用して求める方法がよく知られている。詳しくは多分「数学 BII」で触れられるであろう。乞うご期待。）これを用いて、$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ の値を求めよう。

(1) $\Gamma(s) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{s-1}dx$ で、$x = y^2$ とおいて、y の積分に変換せよ。

(2) これを用いて、$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ の値を求めよ。

7-49B. 有理関数

$$f(x) = \frac{7x^2+6x-5}{(x-1)^2(x^2+2x+5)}$$

の不定積分を計算したい。

(1) $f(x) = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{(x-1)^2} + \dfrac{cx+d}{x^2+2x+5}$ を満たす定数 a,b,c,d を求めよ。

(2) それぞれの項の不定積分を計算して、$\displaystyle\int f(x)dx$ を求めよ。

7-50C. $I_n = \displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^2)^n}$ $(n = 0,1,2,\dots)$ が満たす漸化式を求めよう。（以下、I_n は不定積分なので、定数の差は気にしなくてよい。）

(1) $1+x^2 = t$ と置換することにより、$\displaystyle\int \frac{x}{(1+x^2)^n}dx$ を求めよ。

(2) $\dfrac{1}{(1+x^2)^n} - \dfrac{1}{(1+x^2)^{n+1}} = \dfrac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}} = x\dfrac{x}{(1+x^2)^{n+1}}$ と見て部分積分することにより、$I_n - I_{n+1}$ を I_n で表し、I_n, I_{n+1} の関係式を求めよ。

7-51B. 次の不定積分を、有理関数の積分に帰着せよ。

(1) $\displaystyle\int \frac{x+\sqrt[5]{x+1}}{x+1}dx$ （ヒント：$t = \sqrt[5]{x+1}$ とおく。）

(2) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1-x-2x^2}}{2+x}dx$ （ヒント：$y = \sqrt{1-x-2x^2}$ とおくと、$y^2 = 1-x-2x^2$ となり、これは楕円 C の方程式である。C 上に分かり易い点 P（例えば $(-1,0)$）を取り、P を通り傾き t の直線 ℓ を考える。C と ℓ との交点のうちで P と異なる点を $Q(x,y)$ とすると、Q の座標 x,y はともに t の有理式で書ける。この変数変換を用いると、有理関数の積分に変換できる。）

(3) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{1+\sin x+\cos x}dx$ （ヒント：$t = \tan\dfrac{x}{2}$ とおく。）