

3. 級数の収束性

3-1. 数列・級数・関数の収束.

- 数列 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ が値 a に収束 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n > N : |a - a_n| < \varepsilon$
- 級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が値 a に収束 \Leftrightarrow 部分和の成す数列 $(\sum_{k=0}^n a_k)_{n=0}^{\infty}$ が a に収束
- 数列・級数が収束しない時は全て発散というが、特に、
数列 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ が正の無限大に発散 $\Leftrightarrow \forall M : \exists N : \forall n > N : a_n > M$
- 関数 $f(x)$ が $x \rightarrow x_0$ で値 a に収束
 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$
- 関数 $f(x)$ が $x \rightarrow +\infty$ で値 a に収束 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists M : \forall x > M : |f(x) - a| < \varepsilon$
- 関数 $f(x)$ が $x \rightarrow x_0$ で正の無限大に発散
 $\Leftrightarrow \forall M : \exists \delta > 0 : \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M$

3-2. 絶対収束.

- (上に) 有界な単調増加数列はその上限に収束する。
* 数列 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ が上に有界 $\Leftrightarrow \exists M : \forall n : a_n \leq M$
* 上に有界な数列 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ の上限 (最小上界) $\sup a_n := \min\{M | \forall N : a_n \leq M\}$
(即ち、 $\forall N : a_n \leq M_0$ かつ $\forall \varepsilon > 0 : \exists N : a_n > M_0 - \varepsilon$ となる M_0 のこと)
- 正項級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ はその部分和が (上に) 有界ならその上限に収束する。項の順番を入れ換えても、収束性や極限值は変わらない (同じ値に収束)。
- 絶対収束する級数は収束する。項の順番を入れ換えても、収束性や極限值は変わらない (同じ値に収束)。
* 級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が絶対収束 \Leftrightarrow 級数 $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ が収束
- 収束するが絶対収束しない級数 (条件収束) では、項の順番を入れ換えると、(正負の無限大を含めて) 任意の値に収束し得る。
- 交替級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ (n : 偶数の時 $a_n > 0$, n : 奇数の時 $a_n < 0$) は、 $a_n \rightarrow 0$ なら収束する (絶対収束するとは限らない)。

3-3. 級数の収束性判定. 正項級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ について

- 既知の正項級数 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ と比較して
* 有限個の n を除いて $a_n \leq b_n$ で $\sum b_n$: 収束 $\Rightarrow \sum a_n$: 収束
* 有限個の n を除いて $a_n \geq b_n$ で $\sum b_n$: 発散 $\Rightarrow \sum a_n$: 発散
注: 上記の判定法で、
* 途中からでも良い ($\exists N : \forall n \geq N : a_n \leq b_n$ などでも可)
* 定数倍しても良い ($\exists C > 0 : a_n \leq Cb_n$ などでも可)
- d'Alembert の判定法 (比テスト)
* $(\exists r < 1$: 有限個の n を除いて $a_{n+1}/a_n \leq r) \Rightarrow \sum a_n$: 収束
* $a_{n+1}/a_n \rightarrow r (n \rightarrow \infty)$ のとき、
 $r < 1 \Rightarrow \sum a_n$: 収束, $r > 1 \Rightarrow \sum a_n$: 発散
- Cauchy の判定法 (n 乗根テスト)
* $(\exists r < 1$: 有限個の n を除いて $\sqrt[n]{a_n} \leq r) \Rightarrow \sum a_n$: 収束
* $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow r (n \rightarrow \infty)$ のとき、
 $r < 1 \Rightarrow \sum a_n$: 収束, $r > 1 \Rightarrow \sum a_n$: 発散
- 上記の判定法で $r = 1$ の時はこれだけでは判らない。(より精密な判定法あり。)

3-4. 級数の収束・発散の例.

- $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ は $|x| < 1$ で絶対収束 ($= \frac{1}{1-x}$)、 $|x| \geq 1$ で発散
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ は $s > 1$ で (絶対) 収束、 $s \leq 1$ で発散
- $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^s}$ は $s > 1$ で (絶対) 収束、 $s \leq 1$ で発散