

#### 4. TAYLOR 展開

##### 4-1. 冪級数の収束性・収束半径.

- 冪級数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  において、  
 $x = x_0$  で  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$  有界 (即ち、 $\exists C > 0 : \forall n : |a_n x_0^n| < C$ )  $\implies |x| < |x_0|$  で絶対収束
- 冪級数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  において、  
 $r := \sup\{x \mid \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n : \text{収束}\} : \text{収束半径}$   
 ( $\forall x$  で収束する時は便宜上  $r = \infty$  という。  $x = 0$  のみで収束する時は  $r = 0$ 。)
- 収束半径  $r$  の時、 $|x| = r$  を収束円といい、 $|x| < r$  の範囲を収束円内という。
- $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  の収束半径が  $r \iff |x| < r$  で絶対収束、 $|x| > r$  で発散  
 ( $r = \infty$  の時は  $\forall x$  で絶対収束)  
 $|x| = r$  の時は判らない (いろいろな場合がある)
- Cauchy の判定法 ( $n$  乗根テスト):  $\sqrt[n]{|a_n|} \rightarrow s (n \rightarrow \infty) \implies$  収束半径は  $s^{-1}$
- d'Alembert の判定法 (比テスト):  $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \rightarrow s (n \rightarrow \infty) \implies$  収束半径は  $s^{-1}$
- 上極限を用いた収束半径の公式:  $r = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$

##### 4-2. Taylor 展開.

- 何回でも微分できる関数  $f(x)$  の ( $x = 0$  を中心とする) (形式的) Taylor 展開

$$\begin{aligned}
 (\spadesuit) \quad f(x) & \text{ “=” } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \\
 & = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots
 \end{aligned}$$

- 剰余項:  $R_N(x) := f(x) - \left( \sum_{n=0}^{N-1} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \right)$
- 剰余項の評価 (Taylor の定理):  $f$  が  $N$  階微分可能の時、

$$0 < \exists \theta < 1 : R_N(x) = \frac{f^{(N)}(\theta x)}{N!} x^N$$

- 証明に使う定理:
  - ★ Rolle の定理:
    - $f$ : 閉区間  $[a, b]$  で連続、开区間  $(a, b)$  で微分可能、 $f(a) = f(b)$
    - $\implies \exists c \in (a, b) : f'(c) = 0$
  - ★ Cauchy の平均値の定理:
    - $f, g$ : 共に 閉区間  $[a, b]$  で連続、开区間  $(a, b)$  で微分可能で
    - \*  $\nexists c \in (a, b) : f'(c) = g'(c) = 0$
    - \*  $(f(a), g(a)) \neq (f(b), g(b))$
    - $\implies \exists c \in (a, b) : [f(a) - f(b) : g(a) - g(b)] = [f'(c) : g'(c)]$  (比が等しい)
- $N \rightarrow \infty$  で  $R_N(x) \rightarrow 0$  の時、 $(\spadesuit)$  の右辺は収束して本当に  $= f(x)$
- 例えば  $\exists c : \forall N, 0 < \forall \theta < 1 : |f^{(N)}(\theta x)| < c^N$  ならばよい。
- 形式的 Taylor 展開が元の関数に一致しない例:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$$

4-3. 項別微積分. 冪級数で表される関数  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  ( $|x| < r$ ) について

- $\int_{t=0}^x f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$  ( $|x| < r$ )
- $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$  ( $|x| < r$ )

特に  $f(x)$  は収束円内  $|x| < r$  で何回でも微分可能。

4-4. 二項展開.  $\alpha \in \mathbf{R}$  に対し、

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

- $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{1\cdot 2\cdots n}$  : 二項係数
- $\alpha = N \in \mathbf{N}$  の時は普通の二項定理:  $(1+x)^N = \sum_{n=0}^N \binom{N}{n} x^n$
- $\alpha \notin \mathbf{N}$  の時は本当に無限和で、収束半径 1

4-5. Landau の  $o$ -記号,  $O$ -記号.

- $f(x) = o(g(x))$  ( $x \rightarrow a$ )  $\iff \frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow 0$  ( $x \rightarrow a$ )  
 $\iff \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x : 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon |g(x)|$
- $f_1(x) = f_2(x) + o(g(x))$  ( $x \rightarrow a$ )  $\iff f_1(x) - f_2(x) = o(g(x))$
- $f(x) = O(g(x))$  ( $x \rightarrow a$ )  $\iff \frac{f(x)}{g(x)}$  : 有界 ( $x \rightarrow a$ )  
 $\iff \exists C > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x : 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)| < C |g(x)|$
- $x \rightarrow +\infty$  等に対しても同様。
- $f$  が ( $x=0$  の近くで)  $N$  回微分可能ならば、

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \cdots + \frac{f^{(N)}(0)}{N!}x^N + o(x^N) \quad (x \rightarrow 0)$$

• 例 :

- ★  $a < b$  に対し  $x^b = o(x^a)$  ( $x \rightarrow 0$ ),  $x^a = o(x^b)$  ( $x \rightarrow +\infty$ )
- ★  $\forall a \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0$  に対し  $x^a = o(e^{\varepsilon x})$  ( $x \rightarrow +\infty$ )
- ★  $\forall \varepsilon > 0$  に対し  $\log x = o(x^\varepsilon)$  ( $x \rightarrow +\infty$ )
- ★  $\forall \varepsilon > 0$  に対し  $\log x = o(x^{-\varepsilon})$  ( $x \rightarrow +0$ )