5. 指数関数とその仲間たち

5–1. **逆三角関数.**

- 三角関数を単調な区間に制限して逆関数を考えたものを**逆三角関数**という。
- $y = \sin x$ $(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2})$ の逆関数 $y = \arcsin x$ $(-1 \leq x \leq 1, -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2})$ ：**主値**
（しばしば Arcsin x と書かれる）
- $y = \tan x$ $(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2})$ の逆関数 $y = \arctan x$ $(-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2})$ ：**主値**
（しばしば Arctan x と書かれる）
- $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
- Taylor 展開：
  - ⋆ $\arcsin x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^{2n+1} = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \cdots \quad (|x| < 1)$
  - ⋆ $\arctan x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \cdots \quad (|x| < 1)$

5–2. **Euler の公式.**

- $e^{ix} = \cos x + i \sin x$
- $\sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \quad \cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \tan x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{i(e^{ix} + e^{-ix})}$
- de Moivre の公式：$(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$

5–3. **双曲線関数.** 次で定義される関数を、総称して**双曲線関数**という：

- $\sinh x := \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ ：**双曲正弦 (hyperbolic sine)**
- $\cosh x := \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ ：**双曲余弦 (hyperbolic cosine)**
- $\tanh x := \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ ：**双曲正接 (hyperbolic tangent)**

三角関数と類似の公式が多く成立

- $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1, \tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x}$
- $(\sinh x)' = \cosh x, (\cosh x)' = \sinh x$
- 加法定理：
  - ⋆ $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$
  - ⋆ $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$
  - ⋆ $\tanh(x+y) = \dfrac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}$
- Taylor 展開：
  - ⋆ $\sinh x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{5040}x^7 + \cdots$
  - ⋆ $\cosh x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{720}x^6 + \cdots$

6. 一変数関数の積分

6–1. **定積分の定義.** 関数 $y = f(x)$ が有界閉区間 $[a, b] = \{x | a \le x \le b\}$ で有界とする。

- $\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$：区間 $[a, b]$ の**分割**
  $I_i := [x_{i-1}, x_i]$：各小区間 $(i = 1, \ldots, n)$
  小区間の最大幅 $\max\limits_{1 \le i \le n}(x_i - x_{i-1})$ を $|\Delta|, \delta(\Delta)$ 等と書く。
- $m_i := \inf\limits_{x \in I_i} f(x),\ M_i := \sup\limits_{x \in I_i} f(x)$: 各小区間 I_i での関数値 $f(x)$ の下限・上限
- $s_\Delta := \displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}),\ S_\Delta := \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$
- $s := \sup\limits_{\Delta} s_\Delta,\ S := \inf\limits_{\Delta} S_\Delta$: f の $[a, b]$ での**下積分・上積分**
- f が $[a, b]$ で**積分可能** $\overset{\leftarrow}{\Longleftrightarrow}$ $s = S$
  この時、$s = S =: \displaystyle\int_a^b f(x)dx$：$f$ の $[a, b]$ での**定積分**
- (**Darboux の定理**) $(\Delta_n)_{n=1}^{\infty}$：分割の列で、$|\Delta_n| \to 0$ とする。この時、
  $s_{\Delta_n} \to s, S_{\Delta_n} \to S\ (n \to \infty)$。
- 定積分の値の見当がついているときには、次を利用することも出来る：
  $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = I \Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0 : \exists\Delta = \Delta_\varepsilon$：$[a, b]$ の分割 : $I - \varepsilon \le s_\Delta, S_\Delta \le I + \varepsilon$
- 次の Riemann 和を用いて定式化することもある：
  - ⋆ $\Xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$：各小区間から代表点を 1 つづつ選んだもの $(\xi_i \in I_i)$
    $I(\Delta, \Xi) := \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ ：**Riemann 和**
  - ⋆ f が $[a, b]$ で積分可能 $\Longleftrightarrow \exists \lim\limits_{|\Delta| \to 0} I(\Delta, \Xi)$。この時、$\lim\limits_{|\Delta| \to 0} I(\Delta, \Xi) = \displaystyle\int_a^b f(x)dx$

6–2. **積分の基本性質.**

- 区間に関する加法性：$\displaystyle\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$
- 線型性：$\displaystyle\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx, \int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$
- 単調性：$[a, b]$ で $f(x) \ge g(x) \Rightarrow \displaystyle\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b g(x)dx$

6–3. **不定積分.** 定積分関数 $\displaystyle\int_a^x f(t)dt$ に於いて、下端の違いによる定数の差を気にしない時、単に $\displaystyle\int f(x)dx$ と書く。$\cdots$ **不定積分**

6–4. **微分積分学の基本定理.** f が連続ならば、有界閉区間に於いて積分可能で、

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

即ち、**不定積分** = **原始関数**（微分すると f になる関数）。$\cdots$ 微分法と積分法との邂逅 !!
又、F を f の原始関数（の一つ）とすると、

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) \left(= \Big[F(x)\Big]_a^b \text{ と書く}\right)$$

— 抽象的存在は反復によって具体的存在と化する。
足立恒雄「類体論へ至る道」より