

5. 指数関数とその仲間たち

5-1. 逆三角関数.

- 三角関数を単調な区間に制限して逆関数を考えたものを逆三角関数という。
- $y = \sin x$ ($-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$) の逆関数 $y = \arcsin x$ ($-1 \leq x \leq 1, -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$) : 主値
(しばしば $\text{Arcsin } x$ と書かれる)
- $y = \tan x$ ($-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$) の逆関数 $y = \arctan x$ ($-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$) : 主値
(しばしば $\text{Arctan } x$ と書かれる)
- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$
- Taylor 展開 :
 - ★ $\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^{2n+1} = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \dots \quad (|x| < 1)$
 - ★ $\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \dots \quad (|x| < 1)$

5-2. Euler の公式.

- $e^{ix} = \cos x + i \sin x$
- $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \tan x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{i(e^{ix} + e^{-ix})}$
- de Moivre の公式 : $(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$

5-3. 双曲線関数. 次で定義される関数を、総称して双曲線関数という :

- $\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$: 双曲正弦 (hyperbolic sine)
- $\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$: 双曲余弦 (hyperbolic cosine)
- $\tanh x := \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$: 双曲正接 (hyperbolic tangent)

三角関数と類似の公式が多く成立

- $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1, \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$
- $(\sinh x)' = \cosh x, (\cosh x)' = \sinh x$
- 加法定理 :
 - ★ $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$
 - ★ $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$
 - ★ $\tanh(x+y) = \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}$
- Taylor 展開 :
 - ★ $\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{5040}x^7 + \dots$
 - ★ $\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{720}x^6 + \dots$