6. 一変数関数の積分

6–1. **定積分の定義.** 関数 $y=f(x)$ が有界閉区間 $[a,b]=\{x|a\le x\le b\}$ で有界とする。

- $\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$：区間 $[a,b]$ の**分割**
  $I_i:=[x_{i-1},x_i]$：各小区間 $(i=1,\ldots,n)$
  小区間の最大幅 $\max\limits_{1\le i\le n}(x_i-x_{i-1})$ を $|\Delta|,\delta(\Delta)$ 等と書く。
- $m_i:=\inf\limits_{x\in I_i}f(x),\ M_i:=\sup\limits_{x\in I_i}f(x)$：各小区間 I_i での関数値 $f(x)$ の下限・上限
- $s_\Delta:=\sum\limits_{i=1}^n m_i(x_i-x_{i-1}),\ S_\Delta:=\sum\limits_{i=1}^n M_i(x_i-x_{i-1})$
- $s:=\sup\limits_\Delta s_\Delta,\ S:=\inf\limits_\Delta S_\Delta$：$f$ の $[a,b]$ での**下積分・上積分**
- f が $[a,b]$ で**積分可能** $\overset{\leftharpoonup}{\Longleftrightarrow} s=S$
  この時、$s=S=:\displaystyle\int_a^b f(x)dx$：$f$ の $[a,b]$ での**定積分**
- (**Darboux の定理**) $(\Delta_n)_{n=1}^\infty$：分割の列で、$|\Delta_n|\to 0$ とする。この時、
  $s_{\Delta_n}\to s, S_{\Delta_n}\to S\ (n\to\infty)$。
- 定積分の値の見当がついているときには、次を利用することも出来る：
  $\displaystyle\int_a^b f(x)dx=I\iff\forall\varepsilon>0:\exists\Delta=\Delta_\varepsilon$：$[a,b]$ の分割 : $I-\varepsilon\le s_\Delta, S_\Delta\le I+\varepsilon$
- 次の Riemann 和を用いて定式化することもある：
  - $\star$ $\Xi=(\xi_1,\ldots,\xi_n)$：各小区間から代表点を 1 つづつ選んだもの $(\xi_i\in I_i)$
    $I(\Delta,\Xi):=\displaystyle\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$ ：**Riemann 和**
  - $\star$ f が $[a,b]$ で積分可能 $\iff\exists\lim\limits_{|\Delta|\to 0}I(\Delta,\Xi)$。この時、$\lim\limits_{|\Delta|\to 0}I(\Delta,\Xi)=\displaystyle\int_a^b f(x)dx$

6–2. **積分の基本性質.**

- 区間に関する加法性：$\displaystyle\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx=\int_a^c f(x)dx$
- 線型性：$\displaystyle\int_a^b(f(x)\pm g(x))dx=\int_a^b f(x)dx\pm\int_a^b g(x)dx,\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$
- 単調性：$[a,b]$ で $f(x)\ge g(x)\Rightarrow\displaystyle\int_a^b f(x)dx\ge\int_a^b g(x)dx$

6–3. **不定積分.** 定積分関数 $\displaystyle\int_a^x f(t)dt$ に於いて、下端の違いによる定数の差を気にしない時、単に $\displaystyle\int f(x)dx$ と書く。$\cdots$ **不定積分**

6–4. **微分積分学の基本定理.** f が連続ならば、有界閉区間に於いて積分可能で、

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$$

即ち、**不定積分** $=$ **原始関数**（微分すると f になる関数）。$\cdots$ 微分法と積分法との邂逅 !!
又、F を f の原始関数（の一つ）とすると、

$$\int_a^b f(t)dt=F(b)-F(a)\left(=\Big[F(x)\Big]_a^b \text{ と書く}\right)$$

— 抽象的存在は反復によって具体的存在と化する。
足立恒雄「類体論へ至る道」より