

7. 広義積分 (変格積分)

7-1. 広義積分 (変格積分). 積分区間又は非積分関数が有界でない場合.

下記の右辺の極限が存在する場合、左辺の積分が収束するという。

- f : 区間 $[a, b)$ (resp. $(a, b]$) の上端 b (resp. 下端 a) の近くで有界でない場合

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx, \quad \int_a^b f(x)dx := \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$$
- f : 区間 $[a, +\infty)$ (resp. $(-\infty, b]$) で定義されている場合

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx := \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_a^M f(x)dx, \quad \int_{-\infty}^b f(x)dx := \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_{-M}^b f(x)dx$$
- f : 区間 $[a, b]$ の内点 c の近くで有界でない場合
 → 積分区間を $[a, c), (c, b]$ に分けて、それぞれ考えよ。
- f : 積分区間の両端 a, b で広義積分の場合 (a, b の近くで有界でないか、 $a, b = \pm\infty$)
 → 適当な点 c で積分区間を $(a, c], [c, b)$ に分けて、それぞれ考えよ。
- 典型的な例:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx : \begin{cases} \alpha > 1 \Rightarrow \text{収束} \\ \alpha \leq 1 \Rightarrow \text{発散} \end{cases}, \quad \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx : \begin{cases} \alpha < 1 \Rightarrow \text{収束} \\ \alpha \geq 1 \Rightarrow \text{発散} \end{cases}$$
- 比較判定法 (簡単な場合):

$$\star \exists \varepsilon > 0 : f(x) = O\left(\frac{1}{x^{1+\varepsilon}}\right) (x \rightarrow +\infty) \Rightarrow \int_1^{+\infty} f(x)dx : \text{収束}$$

$$\star \exists \varepsilon > 0 : f(x) = O\left(\frac{1}{x^{1-\varepsilon}}\right) (x \rightarrow +0) \Rightarrow \int_0^1 f(x)dx : \text{収束}$$

7-2. Γ 関数・B 関数.

- $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^s \frac{dx}{x}$: Γ 関数 (広義積分は $s > 0$ で収束)
- $B(s, t) = \int_0^1 x^s (1-x)^t \frac{dx}{x(1-x)}$: B 関数 (広義積分は $s > 0, t > 0$ で収束)
- $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s), \quad \Gamma(n+1) = n!, \quad \Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}, \quad B(s, t) = \frac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)}$

8. 積分の計算法

8-1. 有理関数の積分. 部分分数に分解し、次の場合に帰着。(但し $c > 0$)

- $\int \frac{1}{(x-a)^n} dx$: $n = 1$ なら $\log|x-a|$, $n \geq 2$ なら $-\frac{1}{(n-1)(x-a)^{n-1}}$
- $\int \frac{1}{((x+b)^2+c)^n} dx$: 変数変換 $\sqrt{c}t = x+b, \sqrt{c}dt = dx$ で $\int \frac{dt}{(1+t^2)^n}$ に帰着
 → $n = 1$ なら $\arctan t$, $n \geq 2$ なら部分積分で $n-1$ の場合に帰着
- $\int \frac{2(x+b)}{((x+b)^2+c)^n} dx$: 変数変換 $t = (x+b)^2+c, dt = 2(x+b)dx$ で $\int \frac{dt}{t^n}$ に帰着

8-2. 冪根 (平方根など) を含む積分. 不定積分 (原始関数) が求まる幾つかの例を挙げる。

- $\sqrt[n]{ax+b}$ の有理式の積分
 → 変数変換 $y^n = ax+b, ny^{n-1}dy = adx$ で有理関数の積分に帰着
- $\sqrt{ax+b}, \sqrt{cx+b}$ ($\sqrt{1}$ 次式 2 種類) の有理式の積分
 → 変数変換 $y^2 = ax+b, 2ydy = adx$ で $\sqrt{2}$ 次式 の有理関数の積分に帰着
- $\sqrt{ax^2+bx+c}$ の有理式の積分
 → $y^2 = ax^2+bx+c$ 上の点を用いた有理媒介変数表示で有理関数の積分に帰着
- $\sqrt{3}$ 次以上の多項式の積分は、一般には初等関数の範囲に収まらない。
 ($\sqrt{3}$ 次式又は 4 次式 の場合は楕円関数と呼ばれる関数になる。)

8-3. 三角関数の有理関数の積分. $t = \tan \frac{x}{2}$ と置くと、有理関数の積分に変数変換できる。

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \tan x = \frac{2t}{1-t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

9. 積分の公式

$$\begin{array}{ll}
 \int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} \quad (\alpha \neq -1) & \int \sec^2 x dx = \tan x \\
 \int \frac{dx}{x} = \log |x| & \int \operatorname{cosec}^2 x dx = -\cot x \\
 \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log |f(x)| & \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x \\ -\arccos x \end{cases} \quad (\text{注}) \\
 \int e^x dx = e^x & \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{|a|} \\
 \int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} \quad (a > 0, a \neq 1) & \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x \\
 \int f'(x)e^{f(x)} dx = e^{f(x)} & \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} \\
 \int \log x dx = x \log x - x & \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{arcsinh} x = \log(x + \sqrt{1+x^2}) \\
 \int \sin x dx = -\cos x & \int \frac{dx}{\sqrt{a+x^2}} = \log |x + \sqrt{a+x^2}| \\
 \int \cos x dx = \sin x & \int \frac{dx}{1-x^2} = \operatorname{arctanh} x = \frac{1}{2} \log \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \\
 \int \tan x dx = -\log |\cos x| & \int \sqrt{1+x^2} dx = \frac{1}{2} (x\sqrt{1+x^2} + \log(x + \sqrt{1+x^2})) \\
 \int \cot x dx = \log |\sin x| & \int \sqrt{x^2-1} dx = \frac{1}{2} (x\sqrt{x^2-1} - \log |x + \sqrt{x^2-1}|) \\
 \int \sinh x dx = \cosh x & \int \arcsin x dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} \\
 \int \cosh x dx = \sinh x & \int \arctan x dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \log(1+x^2) \\
 \int \tanh x dx = \log \cosh x & \int \operatorname{arcsinh} x dx = x \operatorname{arcsinh} x - \sqrt{1+x^2} \\
 \int \operatorname{coth} x dx = \log |\sinh x| & \int \operatorname{arctanh} x dx = x \operatorname{arctanh} x + \frac{1}{2} \log(1-x^2)
 \end{array}$$

(注)

- $\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x$ ではあるが、不定積分では定数の差は気にしないので、いづれでもよい。
- $\arcsin x, \arctan x$ 等は所謂主値を取る： $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} < \arctan x < \frac{\pi}{2}$

— きみには、 ω のワルツが見えているかな？
 結城 浩「数学ガール」(<http://www.hyuki.com/girl/>) より