7. 広義積分（変格積分）

7–1. 広義積分（変格積分）. 積分区間又は非積分関数が有界でない場合。
下記の右辺の極限が存在する場合、左辺の積分が収束するという。

- f：区間 $[a,b)$（resp. $(a,b]$） の上端 b（resp. 下端 a）の近くで有界でない場合
$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{\varepsilon\to+0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx, \qquad \int_a^b f(x)dx := \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$$
- f：区間 $[a,+\infty)$（resp. $(-\infty,b]$）で定義されている場合
$$\int_a^{+\infty} f(x)dx := \lim_{M\to+\infty}\int_a^{M} f(x)dx, \qquad \int_{-\infty}^b f(x)dx := \lim_{M\to+\infty}\int_{-M}^{b} f(x)dx$$
- f：区間 $[a,b]$ の内点 c の近くで有界でない場合
$\longrightarrow$ 積分区間を $[a,c),(c,b]$ に分けて、それぞれ考えよ。
- f：積分区間の両端 a,b で広義積分の場合（a,b の近くで有界でないか、$a,b=\pm\infty$）
$\longrightarrow$ 適当な点 c で積分区間を $(a,c],[c,b)$ に分けて、それぞれ考えよ。
- 典型的な例：
$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}dx : \begin{cases}\alpha>1 \Rightarrow \text{収束}\\ \alpha\le 1\Rightarrow \text{発散},\end{cases} \qquad \int_0^1\frac{1}{x^\alpha}dx : \begin{cases}\alpha<1 \Rightarrow \text{収束}\\ \alpha\ge 1\Rightarrow \text{発散}\end{cases}$$
- 比較判定法 (簡単な場合)：
$$\star\ \exists\varepsilon>0 : f(x)=O\left(\frac{1}{x^{1+\varepsilon}}\right)(x\to+\infty)\Rightarrow\int_1^{+\infty}f(x)dx\ \text{：収束}$$
$$\star\ \exists\varepsilon>0 : f(x)=O\left(\frac{1}{x^{1-\varepsilon}}\right)(x\to+0)\Rightarrow\int_0^{1}f(x)dx\ \text{：収束}$$

7–2. Γ 関数・B 関数.

- $\Gamma(s)=\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-x}x^s\frac{dx}{x}$ ：Γ **関数**　(広義積分は $s>0$ で収束)
- $\mathrm{B}(s,t)=\displaystyle\int_0^{1}x^s(1-x)^t\frac{dx}{x(1-x)}$ ：B **関数**　(広義積分は $s>0,t>0$ で収束)
- $\Gamma(s+1)=s\Gamma(s),\quad \Gamma(n+1)=n!,\quad \Gamma(s)\Gamma(1-s)=\dfrac{\pi}{\sin\pi s},\quad \mathrm{B}(s,t)=\dfrac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)}$

8. 積分の計算法

8–1. 有理関数の積分. 部分分数に分解し、次の場合に帰着。（但し $c>0$）

- $\displaystyle\int\frac{1}{(x-a)^n}dx$ ：$n=1$ なら $\log|x-a|$, $n\ge 2$ なら $-\dfrac{1}{(n-1)(x-a)^{n-1}}$
- $\displaystyle\int\frac{1}{((x+b)^2+c)^n}dx$ ：変数変換 $\sqrt{c}\,t=x+b,\sqrt{c}\,dt=dx$ で $\displaystyle\int\frac{dt}{(1+t^2)^n}$ に帰着
$\longrightarrow$ $n=1$ なら $\arctan t$, $n\ge 2$ なら部分積分で $n-1$ の場合に帰着
- $\displaystyle\int\frac{2(x+b)}{((x+b)^2+c)^n}dx$ ：変数変換 $t=(x+b)^2+c, dt=2(x+b)dx$ で $\displaystyle\int\frac{dt}{t^n}$ に帰着

8–2. 冪根（平方根など）を含む積分. 不定積分（原始関数）が求まる幾つかの例を挙げる。

- $\sqrt[n]{ax+b}$ の有理式の積分
$\longrightarrow$ 変数変換 $y^n=ax+b, ny^{n-1}dy=adx$ で有理関数の積分に帰着
- $\sqrt{ax+b},\sqrt{cx+b}$（$\sqrt{1\text{次式}\ 2\text{種類}}$）の有理式の積分
$\longrightarrow$ 変数変換 $y^2=ax+b, 2ydy=adx$ で $\sqrt{2\text{次式}}$ の有理関数の積分に帰着
- $\sqrt{ax^2+bx+c}$ の有理式の積分
$\longrightarrow$ $y^2=ax^2+bx+c$ 上の点を用いた有理媒介変数表示で有理関数の積分に帰着
- $\sqrt{3\text{次以上の多項式}}$ の積分は、一般には初等関数の範囲に収まらない。
（$\sqrt{3\text{次式又は}4\text{次式}}$ の場合は楕円関数と呼ばれる関数になる。）

8–3. 三角関数の有理関数の積分. $t=\tan\dfrac{x}{2}$ と置くと、有理関数の積分に変数変換できる。
$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\qquad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\qquad \tan x=\frac{2t}{1-t^2},\qquad dx=\frac{2dt}{1+t^2}$$