本ページ余白

2016年度春期　数学BI（微分積分）　中間試験（担当：角皆）

実施: 2016年6月6日 (月), 13:30 〜 15:00, 11–704教室・11–719教室

1. 一般的な諸注意

- 以下の要領で期末試験に準じて行なう。
- 学生証を机上に提示すること。
- 入室は試験開始後20分まで認める。退室は試験開始後30分を過ぎたら認める。
- 机の上に出してよい物は、学生証の他に筆記用具・下敷（白色かそれに近いもので無地)・時計（電卓機能等のないもの）のみ。
- ノート・プリント・参考書等の参照不可。計算機の使用不可。
- 携帯電話等は電源を切って鞄の中にしまっておくこと。くれぐれも鳴らさないこと。時計としての使用も不可。
- 不正の疑いを招く行為は慎むこと。
- 試験開始まで問題用紙を裏返しておくこと。
- 試験開始後、まづ初めに学生番号・名前を答案用紙の**両面**に記入すること。学生番号・名前の記入はボールペン・サインペン等で行なうこと。
- 試験時間が終了したら直ちに解答を終了して筆記用具を置き、その後で指示に順って答案用紙を提出すること。
- 問題用紙は持ち帰ること。

2. 問題・解答について

- 解答は答案用紙に記述すること。問題番号ごとに指定された場所に書くこと。但し、
  - ⋆ 問1は直観問題であり、○×のみを**解答欄**に記入すればよい。
  - ⋆ 問2・3は値のみを**解答欄**に記入すればよい。
  - ⋆ 問4 (2) は、値を**解答欄にも**記入すること。
- 採点者が読めない答案・意図が伝わらない答案では採点できない。採点者が読めるよう、文字・記号を丁寧に書くこと。数式も文であり、答案は文章である。数式のみで充分な場合もあるので、殊更に丁寧過ぎる必要はないが、数式の散漫な羅列ではいけない。必要に応じて、「とする」「となればよい」「したがって」などの言葉を適切に用いて、意図・論理の伝わる答案を心掛けること。答案の記述は言わば筆記プレゼンテーションであるから、その良し悪しも評価対象である。

3. 期末試験について

- 期日：期末試験期間内に行なう予定。
- 範囲：春期に講義した範囲。中間試験までの範囲も含む。

2016年度春期　数学BI（微分積分）　中間試験（担当：角皆）

問1.　次の級数は収束するか。収束するなら○を、しないなら×を、解答欄に記せ。

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{2016}}{2^n}$　　(2) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}(\log n)^{2016}}$　　(3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \cos n$

問2.　次の冪級数の収束半径（すなわち、$|x| < r$ なら絶対収束し、$|x| > r$ なら発散するような r）を求め、解答欄に記せ。（任意の実数 x に対して絶対収束する場合は ∞ と、$x = 0$ のときのみ絶対収束する場合は 0 と記せ。）

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n7^n} x^n$　　(2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!} x^n$

問3.　Taylor 展開を利用して、次の $x \to 0$ での極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\frac{5\sin x - \sin 5x}{x^3}$　　(2) $\displaystyle\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{1+x}}{x}$　　(3) $\displaystyle\frac{e^x \cos x - 1 - x}{x^3}$

問4.　$f(x) = \cos x$ の Taylor 展開を用いて、$\cos 1$ の近似値を計算したい。以下の計算においては、配布の「$n!, 1/n!$ の表」を利用して良いが、適切な桁までを用いた上で、四捨五入した桁を $3.14\cancel{1}, 3.141\overset{6}{\cancel{5}}\cancel{9}$ のように明示して書くこと。

(1) $\cos x$ の Taylor 展開の剰余項 $R_N(f; x)$ について、$|R_N(f; 1)| < 10^{-6}$ となる（なるべく小さい）N を与えよ。
(2) $\cos 1$ の近似値を小数第 5 位まで計算せよ。（値を解答欄にも記入せよ。）
(3) 求めた近似値と真の値との誤差が 10^{-5} 以下であることを保証せよ。

問5.　関数 $f(x) = \dfrac{1}{2}x^3$ において、x を -2 に近付けると $f(x)$ は -4 に近付くようであるが、その誤差について、$|f(x) - (-4)| < 10^{-4} = 0.0001$ となるためには、x をどの程度2に近付ければ良いか（つまり、$x = -2 + h$ と置くとき、$|h| < \delta$ なら大丈夫と言えるためには、δ の値を幾らに取れば良いか）を考える。

(1) $x = -2 + h$ と置き、$|h| < \delta$ とするとき、δ を用いて誤差 $|f(x) - (-4)|$ を上から評価せよ。（$|f(x) - (-4)| < (\delta$ の式$)$ の形の不等式を求めよ。）
(2) $|f(x) - (-4)| < 10^{-4} = 0.0001$ となるためには、δ の値を幾らに取れば良いか。ぎりぎりの値でなく、桁が判る程度で構わないが、不等式による評価においては、$\fallingdotseq$ などを用いず、確実に正しいものであること。

問6.　関数 $f(x) = x^2$ について、任意の実数 $a \in \boldsymbol{R}$ に対し $x = a$ で連続であることを、ε-δ 流で証明せよ。即ち、任意の正の数 ε に対して、或る正の数 δ が存在して、$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$ となることを、ε に応じて δ を与えることによって示せ。証明の形式は次に順うと良い。

> $\forall\varepsilon > 0$ を取る。
> $\delta = \boxed{\quad ? \quad}$ と取ると、
> $|h| < \delta$ に対し、
> $$\boxed{\begin{array}{c} \cdots \\ |f(a+h) - f(a)| < \varepsilon \text{ を示す} \\ \cdots \end{array}}$$
> 従って、$\displaystyle\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ となり、f は $x = a$ で連続。

問7.　$\tan x$ の Taylor 展開を x^7 の項まで求めよ。

以上

TAYLOR 展開の例

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \quad (|x| < 1)$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots \quad (|x| < 1)$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \cdots \quad (|x| < 1)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \cdots \quad (|x| < 1)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 + \cdots \quad (|x| < 1)$$

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots \quad (|x| < 1)$$

$$\log\frac{1}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \cdots \quad (|x| < 1)$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \cdots$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + \cdots$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6 + \cdots$$

$n!, 1/n!$ の表

n	$n!$	$1/n!$
0	1	1
1	1	1
2	2	0.5
3	6	0.1666666667
4	24	0.0416666667
5	120	0.0083333333
6	720	0.0013888889
7	5040	0.0001984127
8	40320	0.0000248016
9	362880	0.0000027557
10	3628800	0.0000002756