

4 $f(x) = x^2$ の $[0, a]$ での定積分 $I = \int_0^a f(x)dx$ を計算したい。

分割 $\Delta_n : 0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = a$ を n 等分な分割 (即ち $x_i = \frac{ia}{n}$) とする。

(1) 各小区間 $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ での $f(x)$ の下限 $m_i = \inf_{x \in I_i} f(x)$ および上限 $M_i = \sup_{x \in I_i} f(x)$ は?

(2) $s_{\Delta_n} = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1})$ 及び $S_{\Delta_n} = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1})$ を計算せよ。

(3) 任意の n に対して $s_{\Delta_n} \leq I \leq S_{\Delta_n}$ であることから、 $I = \int_0^a f(x)dx$ を求めよ。
($\lim_{n \rightarrow \infty} s_{\Delta_n}, \lim_{n \rightarrow \infty} S_{\Delta_n}$ が、それぞれ存在して等しくなることを確かめよ。)