

前回の復習から

- この部分は写すな
- 自分のノートを見直せ
- 必要があれば補足事項を書き込め

本講義の概要

- 不等式による評価
- 級数和の収束発散や簡単な場合の判定法
- 平均値の定理から Taylor の定理に至る話
- 逆三角関数など幾つかの新しい関数
- 積分の基礎付けや計算方法

「不等式の数学」とは？

収束・発散・極限などなど、それも

- はさみ打ちの原理
- 区分求積法
- 誤差の評価 (**estimate**)

など

問 1 :

縦が大体 3cm、横が大体 5cm の長方形の紙がある。

従って、面積は大体

$$3 \times 5 = 15\text{cm}^2$$

である。さて、

面積の誤差が 0.1cm^2 以内

であることを保証するためには、

縦横の長さの誤差をどの程度に収めれば良いか？

真の縦の長さを $(3 + h)$ cm、
真の横の長さを $(5 + k)$ cm、
誤差が δ cm 以内とすると、

$$0 \leq |h| \leq \delta, \quad 0 \leq |k| \leq \delta.$$

$$\begin{aligned} |(3 + h)(5 + k) - 15| &= |5h + 3k + hk| \\ &\leq 5|h| + 3|k| + |h||k| \\ &\leq 8\delta + \delta^2. \end{aligned}$$

従って、 $8\delta + \delta^2 \leq 0.1$ となれば良い。

ここで、(例えば) $\delta \leq 1$ とする。すると、

$$8\delta + \delta^2 \leq 8\delta + \delta < 10\delta$$

であるから、 $10\delta \leq 0.1$ となれば良い。これより

$$\delta \leq \frac{1}{100} = 0.01$$

となる。これと、さっき仮定した $\delta \leq 1$ とを共に満たせば良いので、

$$\delta = \min\{1, 0.01\} = 0.01$$

に取れる。従って、縦横の長さの誤差は
0.01cm 以内

であれば良い。(以上復習)

さて、(詳しく見るために)少し問題を単純にして、

問 2 :

一辺が大体 3cm の正方形
(従って面積は大体 9cm^2) で、

面積の誤差を 0.1cm^2 未満にしたければ、

一辺の誤差をどの程度に収めれば良いか。

更に問題を単純にして、

一辺の長さは縦横ともに $(3 + h)$ cm とし、

誤差は δ cm 未満（つまり $|h| < \delta$ ）としよう。

$$\begin{aligned} |(3 + h)^2 - 9| &= |6h + h^2| \\ &\leq 6|h| + |h|^2 \\ &< 6\delta + \delta^2 \end{aligned}$$

この後は前回のように ……

問 2' :

関数 $f(x) = x^2$ において、

x を 3 に近付けると $f(x)$ は 9 に近づくようだが、
その誤差について、

$$|f(x) - 9| < 0.1$$

となるためには、

x をどの程度 3 に近づければ良いか？

($|x - 3| < \delta \implies |f(x) - 9| < 0.1$ となるには、
 δ の値をどれくらいにすれば良いか？)

($x = 3 + h$ と置くと計算し易い)

ここでは、誤差の限界を設定して、
その値以内に収めようとしてきたが、

今の場合、原理的には、

どんなに厳しい限界に対しても、同様の議論が可能

→ 誤差の限界が 0.0001cm^2 だったら？

→ より一般に、誤差の限界を εcm^2 とすると？

問 2⁺ :

関数 $f(x) = x^2$ において、

x を 3 に近付けると $f(x)$ は 9 に近づくようだが、

その誤差について、正の実数値 $\varepsilon > 0$ に対し、

$$|f(x) - 9| < \varepsilon$$

となるためには、

x をどの程度 3 に近付ければ良いか？

($|x - 3| < \delta \implies |f(x) - 9| < \varepsilon$ となるには、
 δ の値をどれくらいにすれば良いか？)

($x = 3 + h$ と置くと計算し易い)

これは何をやっているかと言うと、

「 h が充分 0 に近ければ、
 $(3+h)^2$ は充分 9 に近い」

ということを行っている

「 x が充分 3 に近ければ、
 x^2 は充分 9 に近い」

と言っても良い

これが

$$\lim_{h \rightarrow 0} (3 + h)^2 = 9$$

或は

$$\lim_{x \rightarrow 3} x^2 = 9$$

の実質的な意味内容なのであった !!

どんな（小さな）正の実数 ε に対しても、
或る（都合の良い）正の実数 δ が存在して、
$$0 < |x - 3| < \delta \implies |x^2 - 9| < \varepsilon$$

記号で書くと、

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \\ 0 < |x - 3| < \delta \implies |x^2 - 9| < \varepsilon$$

この流儀で $\lim_{x \rightarrow 3} x^2 = 9$ を定式化（定義）すると
色々な議論がきちんと出来て良さそうだ

ε - δ 流の関数の極限の定義

関数 f に対し、

$$x \longrightarrow a \text{ のとき } f(x) \longrightarrow b \text{ である}$$
$$\left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \right)$$

ということを、次で**定義**する：

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - b| < \varepsilon$$

ε - δ 流の関数の連続の定義

関数 f が $x = a$ で連続であるとは、

$$x \longrightarrow a \text{ のとき } f(x) \longrightarrow f(a) \text{ である} \\ \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \right)$$

ということであったから、次のようになる：

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

演習問題 1 :

関数 $f(x) = x^2$ において、 x を -4 に近づけると $f(x)$ は 16 に近づくようだが、その誤差について、

- (1) $|f(x) - 16| < 0.1$ となるためには、 x をどの程度 -4 に近づければ良いか。(つまり、

$$|x - (-4)| < \delta \implies |f(x) - 16| < 0.1$$

と言えるためには、 δ の値をどれくらいにすれば良いか。)

- (2) $|f(x) - 16| < 0.0001 = \frac{1}{10000}$ となるためには？

- (3) 一般に、 ε を任意の正の数として、

$$|f(x) - 16| < \varepsilon$$

となるためには、 δ の値をどれくらいにすれば良いか。

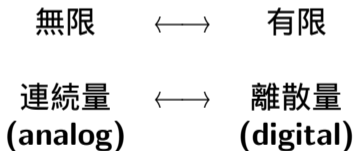
以上のような「不等式の取扱い」を用いて、

「収束」「発散」「極限」などについて、

詳しく調べていこう

極限

良く分からないものを、良く分かるもので近似する



等比級数の和の公式

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x}$$

逆に見ると、

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n)\end{aligned}$$



関数を「多項式の極限」として表すこと
(冪級数・整級数)

一般に、関数 f について、

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n \end{aligned}$$

と表すことを考えよう … Taylor 展開

→ 係数 $a_n = ?$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

従って、

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots$$

と表せるとすれば、

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 \\ &\quad + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \end{aligned}$$