

前回の演習の答案へのコメント

- 読める答案を書く
 - 「答案は（数式交じりの）文章である」
- ★ 読める字で書く
- ★ 読みとれる論理で書く
 - * 「… とする」のか、「… となる」のか
 - * 必要条件か十分条件か
 - * 等式・不等式の根拠は何か
- 技術的なコメントは細かくなるので略

(形式的) Taylor 展開

$$f(x) \text{ “=” } f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 \\ + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \\ \left(= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \right)$$

二項展開 (a は任意の実数で可)

$$\begin{aligned}(1+x)^a &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n \\ &= 1 + ax + \cdots + \binom{a}{n} x^n + \cdots\end{aligned}$$

$$\binom{a}{n} = \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n(n-1)\cdots 1}$$

: 二項係数 (**binomial coefficient**)

無限等比級数の和

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-rx} &= \sum_{n=0}^{\infty} r^n x^n \\ &= 1 + rx + r^2 x^2 + r^3 x^3 + \dots\end{aligned}$$

$$\text{収束} \iff |rx| < 1$$

$$\iff |x| < \frac{1}{|r|}$$

(この例は念頭に置いておこう)

指数関数・対数関数

$$\begin{aligned}e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \\ &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots\end{aligned}$$

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$$

$$\log \frac{1}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

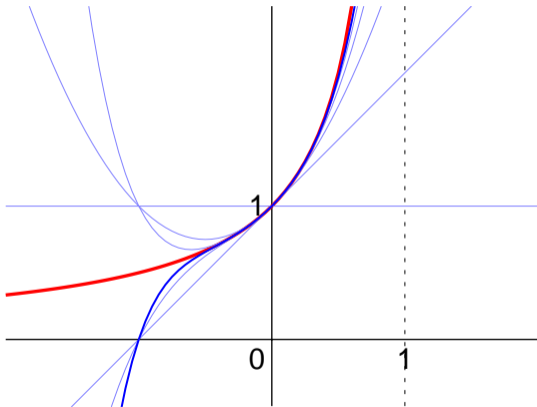
三角関数

$$\begin{aligned}\cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \\ &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \dots \\ \sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \\ &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots\end{aligned}$$

Taylor 展開の利点 (何が良いか)

- $x = 0$ の近くでの様子が分かる
 - ★ 近似値の計算
 - ★ $x \rightarrow 0$ の極限の様子
- 統一的・一意的表示
- 良く分からない関数の色々な性質が分かる (かも)

例： $f(x) = \frac{1}{1-x} \sim 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \dots$



Taylor 展開を用いた近似値の計算

例： $\frac{1}{1-0.02} = ?$ $e^{0.02} = \exp(0.02) = ?$

→ どの辺で打切るとどの程度の誤差か？

Taylor 展開を用いた $x \rightarrow 0$ の極限の計算

例： $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = ?$

演習問題 2 :

(1) $f(x) = \sin x$ の Taylor 展開を求めよ。

(2) これを利用して、

(a) 極限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$ を求めよ。

(b) $\sin 1$ の近似値を小数第 4 位まで求めよ。

(形式的) Taylor 展開の計算

高階微分 $f^{(n)}(x)$ の直接計算が難しい場合：

- 既知の公式から（等比級数の和など）
- 既知の展開に代入
- 既知の展開から四則演算で
- 既知の展開から項別微積分で

(形式的) Taylor 展開の計算

例題：

$$(1) e^{-x^2} = \exp(-x^2)$$

$$(2) e^x \cos x$$

$$(3) \frac{1}{\cos x}$$

$$(4) -\log(1 - x)$$

(後は演習の時間に)

Taylor 展開の利点 (再掲)

- $x = 0$ の近くでの様子が分かる
 - ★ 近似値の計算
 - ★ $x \rightarrow 0$ の極限の様子
- 統一的・一意的表示
- 良く分からない関数の色々な性質が分かる (かも)

Taylor 展開の欠点

- 大域的性質は判り難い

問題点 (考えなくてはならないこと)

- 級数が収束するか？
- 収束したら元の関数と一致するか？
- 誤差の理論的評価は？
- 項別微積分 (極限操作の順序交換) を
やっつけてよいか？

今後の課題

- 無限級数の収束・発散の判定
- 特に、冪級数の場合
- “Taylor の定理”（誤差項の評価）
- 項別微積分

例：調和級数

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \cdots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}$$

例：調和級数

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots$$

$$-\frac{1}{2}S = -\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots$$

$$\frac{1}{2}S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots$$

例：調和級数

$$\frac{1}{2}S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots$$

$$\frac{1}{2}S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \dots$$

⇓

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \dots ??$$

例：調和級数

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots$$

$$-\frac{1}{2}S = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{8} - \dots$$

$$-\frac{1}{2}S = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{8} - \dots$$

$$0 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots ??$$

例：調和級数

実は、

$$T = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots$$

は収束するが、

$$T = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \dots > \frac{1}{2}$$

$$T = 1 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) + \dots < 1$$

より $\frac{1}{2} < T < 1$ (実は $T = \log 2 \doteq 0.693$)

例：調和級数

