

Taylor 展開の利点 (何が良いか)

- $x = 0$ の近くでの様子が分かる
 - ★ 近似値の計算
 - ★ $x \rightarrow 0$ の極限の様子
- 統一的・一意的表示
- 良く分からない関数の色々な性質が分かる (かも)

Taylor 展開の欠点

- 大域的性質は判り難い

問題点 (考えなくてはならないこと)

- 級数が収束するか？
- 収束したら元の関数と一致するか？
- 誤差の理論的評価は？
- 項別微積分 (極限操作の順序交換) を
やっつけてよいか？

今後の課題

- 無限級数の収束・発散の判定
- 特に、冪級数の場合
- “Taylor の定理”（誤差項の評価）
- 項別微積分

例：調和級数

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \cdots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}$$

例：調和級数

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots$$

$$-\frac{1}{2}S = -\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots$$

$$-\frac{1}{2}S = -\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots$$

$$0 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots ??$$

例：調和級数

実は、

$$T = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots$$

は収束するが、

$$T = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \dots > \frac{1}{2}$$

$$T = 1 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) + \dots < 1$$

より $\frac{1}{2} < T < 1$ (実は $T = \log 2 \doteq 0.693$)

例：調和級数

$$T' = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \dots$$

も収束するが、

$$T' = 1 + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9}\right) + \dots > 1$$

$$T' = 1 + \frac{1}{3} + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) + \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11}\right) + \dots < \frac{4}{3}$$

より $1 < T' < \frac{4}{3}$ (実は $T' = \frac{3}{2} \log 2 \doteq 1.040$)

例：調和級数

このような 奇怪 な現象が起こる理由は、

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots$$

が発散することにある：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} = +\infty \quad !!$$

例：調和級数

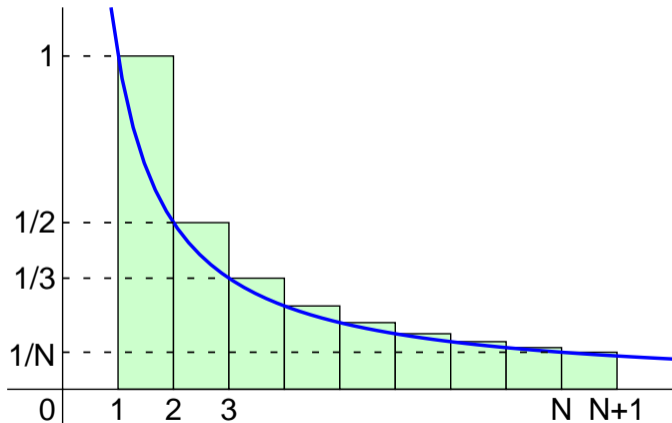
$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}$$

は 発散する

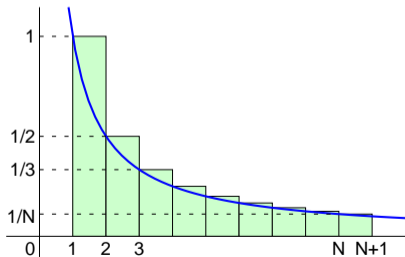
例：調和級数



例：調和級数

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{N}$$

$$> \int_1^{N+1} \frac{dx}{x} = \log(N+1) \rightarrow +\infty \quad (N \rightarrow \infty)$$



絶対収束・条件収束

$$T = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots$$

が収束する一方、各項の絶対値を取った級数

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots$$

は発散する。

このような収束の場合は非常に繊細だが、
各項の絶対値を取った級数も収束する場合には、
かなり扱い易い性質を持つ … **絶対収束**

絶対収束・条件収束

実数列 (a_n) に対し、

$$\begin{aligned} a_n^+ &:= \begin{cases} a_n = |a_n| & (a_n \geq 0) \\ 0 & (a_n < 0) \end{cases} \\ &= \max \{a_n, 0\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_n^- &:= \begin{cases} 0 & (a_n \geq 0) \\ -a_n = |a_n| & (a_n < 0) \end{cases} \\ &= \max \{-a_n, 0\} = -\min \{0, a_n\} \end{aligned}$$

とおく

絶対収束・条件収束

例：

$$(a_n)_{n=1}^{\infty} = \left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \dots\right)$$

とすると

$$(a_n^+)_{n=1}^{\infty} = \left(1, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{5}, 0, \dots\right)$$

$$(a_n^-)_{n=1}^{\infty} = \left(0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{6}, \dots\right)$$

$$a_n = a_n^+ - a_n^-, \quad |a_n| = a_n^+ + a_n^-$$

絶対収束・条件収束

$$\begin{aligned}\sum |a_n| : \text{収束} &\iff \sum a_n^+, \sum a_n^- : \text{共に収束} \\ &\implies \sum a_n : \text{収束}\end{aligned}$$

しかし、一般には逆は成り立たない!!

絶対収束・条件収束

$$\sum |a_n| : \text{収束} \iff \sum a_n^+, \sum a_n^- : \text{共に収束}$$
$$\implies \sum a_n : \text{収束}$$

しかし、一般には逆は成り立たない!!

絶対収束・条件収束

$\sum a_n^+$, $\sum a_n^-$: 共に収束 (即ち、 $\sum |a_n|$: 収束) の時、

「絶対収束 (**absolutely convergent**)」

という。この時は、

項の順番を入替えても同じ値に収束する。

絶対収束性の判定 ... 正項級数の収束判定

絶対収束・条件収束

$\sum a_n^+$, $\sum a_n^-$: 共に収束しない
(即ち、 $\sum |a_n|$: 収束しない) が、

$\sum a_n$ は収束する時、

「**条件収束 (conditionally convergent)**」

という。この時は、項の順番を入替えると、

- 任意の実数値に収束させることも、
- $+\infty$ に発散させることも、
- $-\infty$ に発散させることも、
- どれでもないようにさせることも、

出来る

正項級数の収束判定

部分和：
$$S_N = \sum_{n=0}^N a_n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N$$

正項級数 ($a_n > 0$) \iff 部分和 S_N が単調増加

→ 単調増加数列の収束判定へ

単調増加数列の収束判定

「単調増加数列 $(s_n)_{n=0}^{\infty}$ が
正の無限大に発散する： $s_n \longrightarrow +\infty$ 」
とは？

“幾らでも大きくなる”

“どんな値よりも大きくなる”

“どんな値 M に対しても
どこかの番号 n で s_n の方が大きい”

$$\forall M : \exists n : s_n > M$$

単調増加数列の収束判定

「単調増加数列 $(s_n)_{n=0}^{\infty}$ が
正の無限大に発散する： $s_n \longrightarrow +\infty$ 」
とは？

“幾らでも大きくなる”

“どんな値よりも大きくなる”

“どんな値 M に対しても
どこかの番号 n で s_n の方が大きい”

$$\forall M : \exists n : s_n > M$$

単調増加数列の収束判定

「単調増加数列 $(s_n)_{n=0}^{\infty}$ が
正の無限大に発散する： $s_n \longrightarrow +\infty$ 」
とは？

“幾らでも大きくなる”

“どんな値よりも大きくなる”

“どんな値 M に対しても
どこかの番号 n で s_n の方が大きい”

$$\forall M : \exists n : s_n > M$$

単調増加数列の収束判定

「単調増加数列 $(s_n)_{n=0}^{\infty}$ が
正の無限大に発散する： $s_n \longrightarrow +\infty$ 」
とは？

“幾らでも大きくなる”

“どんな値よりも大きくなる”

“どんな値 M に対しても
どこかの番号 n で s_n の方が大きい”

$$\forall M : \exists n : s_n > M$$

単調増加数列の収束判定

「単調増加数列 $(s_n)_{n=0}^{\infty}$ が
正の無限大に発散する： $s_n \longrightarrow +\infty$ 」
とは？

“幾らでも大きくなる”

“どんな値よりも大きくなる”

“どんな値 M に対しても
どこかの番号 n で s_n の方が大きい”

$$\forall M : \exists n : s_n > M$$

数列の収束・発散

単調増加とは限らない

一般の数列 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ については、

$n \rightarrow \infty$ のとき $a_n \rightarrow +\infty$
($(a_n)_{n=0}^{\infty}$ が正の無限大に発散)

とは、

“どんな値 M に対しても

どこかの番号 N について

それより先の番号 $n > N$ で

常に a_n の方が大きい”

$$\forall M : \exists N : \forall n : n > N \implies a_n > M$$

数列の収束・発散

数列 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ について、

$n \rightarrow \infty$ のとき $a_n \rightarrow a$
($(a_n)_{n=0}^{\infty}$ が a に収束)

とは、

“どんな (小さな) 正の実数値 $\varepsilon > 0$ に対しても
どこかの番号 N について

それより先の番号 $n > N$ で

常に誤差 $|a_n - a|$ が ε 未満”

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n : n > N \implies |a_n - a| < \varepsilon$$

単調増加数列の収束判定

単調増加数列 $(s_n)_{n=0}^{\infty}$ が

$$\lceil \forall M : \exists n : s_n > M \rceil$$

となったら $+\infty$ に発散

収束する為には

$$\exists M : \forall n : s_n \leq M$$

でなければならぬ

M : 数列 $(s_n)_{n=0}^{\infty}$ の上界 (upper bound)

上界が存在する数列を

上に有界 (bounded above) という

単調増加数列の収束判定

単調増加数列 $(s_n)_{n=0}^{\infty}$ が

$$\lceil \forall M : \exists n : s_n > M \rceil$$

となったら $+\infty$ に発散

収束する為には

$$\exists M : \forall n : s_n \leq M$$

でなければならぬ

M : 数列 $(s_n)_{n=0}^{\infty}$ の上界 (upper bound)

上界が存在する数列を

上に有界 (bounded above) という

単調増加数列の収束判定

単調増加数列 $(s_n)_{n=0}^{\infty}$ が

$$\lceil \forall M : \exists n : s_n > M \rceil$$

となったら $+\infty$ に発散

収束する為には

$$\exists M : \forall n : s_n \leq M$$

でなければならぬ

M : 数列 $(s_n)_{n=0}^{\infty}$ の**上界 (upper bound)**

上界が存在する数列を

上に有界 (bounded above) という

単調増加数列の収束判定

単調増加数列 $(s_n)_{n=0}^{\infty}$ が収束する為には

$$\boxed{\exists M : \forall n : s_n \leq M}$$

でなければならぬ

では、逆に、

$$\exists M : \forall n : s_n \leq M$$

なら、或る実数値に収束するのか？

定理

- 単調増加数列が収束 \iff 上に有界
- 正項級数が収束 \iff 部分和が有界

即ち、 $\forall n : a_n \geq 0$ の時、

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n : \text{収束} \iff \exists M : \forall N : \sum_{n=0}^N a_n \leq M$$

しかも、

- 極限值は部分和の**最小上界**（**上限**）
- 部分和は“飛び飛びの和”も考えても同じ
- 順番を入替えても同じ値に収束

極限值は部分和の最小上界 (**上限**)

(least upper bound, **supremum**)

$$M_0 := \min \left\{ M \mid \forall N : \sum_{n=0}^N a_n \leq M \right\}$$
$$= \sup \left\{ \sum_{n=0}^N a_n \mid N = 0, 1, 2, \dots \right\}$$

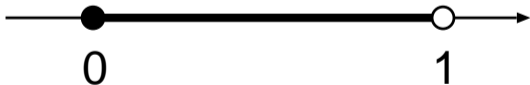
とするとき、

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N a_n = M_0.$$

上限・下限について

例：半開区間 $I = [0, 1) = \{x \mid 0 \leq x < 1\}$

I に最大値はないが、
どう見ても 1 が “最大値みたいな値” である



上限・下限について

1 は最小の上界：

- 1 が上界である： $\forall x \in I : x \leq 1$
- 1 より少しでも小さくしたら上界でない：

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists x \in I : x > 1 - \varepsilon$$

“どんな（小さな）正の数 ε についても
或る（うまい/まずい） $x \in I$ があって
 x が $1 - \varepsilon$ を超える”

このことを、

1 が I の**上限 (supremum)** である

と言い、 $\sup I = 1$ と書く

上限・下限について

一般に、

実数全体の集合 \mathbb{R} の部分集合 $S \subset \mathbb{R}$ に対し、
実数 $a \in \mathbb{R}$ が次を満たす

(即ち、 a が S の最小の上界である) とき、
 a が S の**上限**であるといい、 $a = \sup S$ と書く：

- $\forall x \in S : x \leq a$
(即ち、 a が S の上界 (の一つ) である)
- $\forall \varepsilon > 0 : \exists x \in S : x > a - \varepsilon$
(即ち、 a より少しでも小さくしたら
 S の上界でない)

定理

- 単調増加数列が収束 \iff 上に有界
- 極限值は数列の最小上界（上限）

このことの“証明”（特に上限の**存在**）は、実は

実数とは何か？

に立ち戻らなければならない

本授業ではそこまでは立ち戻らず、

これを実数の基本性質として認めることとする

詳しく学びたい人は、秋学期の

「**現代数学 B**」(全学共通科目)

を受講されたい

収束・発散の判定法

さて、具体的な数列について、

収束・発散の判定をするには、

どうしたらよいだろうか？

→ 収束・発散が良く判っている級数と比較する
(比較判定法)

収束・発散の判定法

さて、具体的な数列について、

収束・発散の判定をするには、

どうしたらよいだろうか？

→ 収束・発散が良く判っている級数と比較する
(比較判定法)

比較判定法 (良く判っている級数と比較)

正項級数 $(a_n)_{n=0}^{\infty}, (b_n)_{n=0}^{\infty}$ について、

$\forall n : a_n \leq b_n$ のとき

- $\sum b_n$: 収束 $\implies \sum a_n$: 収束
- $\sum a_n$: 発散 $\implies \sum b_n$: 発散

- 途中からでも良い
($\exists N : \forall n \geq N : a_n \leq b_n$ でも可)
- 定数倍しても良い
($\exists C > 0 : \forall n : a_n \leq Cb_n$ でも可)

比較判定法 (良く判っている級数と比較)

正項級数 $(a_n)_{n=0}^{\infty}, (b_n)_{n=0}^{\infty}$ について、

$\forall n : a_n \leq b_n$ のとき

- $\sum b_n$: 収束 $\implies \sum a_n$: 収束
- $\sum a_n$: 発散 $\implies \sum b_n$: 発散

- 途中からでも良い
($\exists N : \forall n \geq N : a_n \leq b_n$ でも可)
- 定数倍しても良い
($\exists C > 0 : \forall n : a_n \leq Cb_n$ でも可)

比較判定法 (良く判っている級数と比較)

正項級数 $(a_n)_{n=0}^{\infty}, (b_n)_{n=0}^{\infty}$ について、

$\forall n : a_n \leq b_n$ のとき

- $\sum b_n$: 収束 $\implies \sum a_n$: 収束
- $\sum a_n$: 発散 $\implies \sum b_n$: 発散

- 途中からでも良い
($\exists N : \forall n \geq N : a_n \leq b_n$ でも可)
- 定数倍しても良い
($\exists C > 0 : \forall n : a_n \leq Cb_n$ でも可)

比較判定法（良く判っている級数と比較）

典型的な「良く判っている級数」

… 等比級数 $a_n = r^n$

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1 + r + r^2 + r^3 + \dots$$

- $|r| < 1$ のとき収束し、その和は $\frac{1}{1-r}$
- $|r| \geq 1$ のとき発散

→ 大体 |“隣との比”| < 1 くらいなら収束

比較判定法（良く判っている級数と比較）

典型的な「良く判っている級数」

… 等比級数 $a_n = r^n$

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1 + r + r^2 + r^3 + \dots$$

- $|r| < 1$ のとき収束し、その和は $\frac{1}{1-r}$
- $|r| \geq 1$ のとき発散

→ 大体 |“隣との比”| < 1 くらいなら収束

等比級数との比較

$a_n = r^n$ から“隣との比” r を取り出すには？

- 漸化式: $a_{n+1} = r a_n \rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$
- 一般項: $a_n = r^n \rightarrow \sqrt[n]{a_n} = r$

→ 一般の数列 (a_n) に対しても、

$\frac{a_{n+1}}{a_n}$ や $\sqrt[n]{a_n}$ が大体 r くらいなら

振舞は同様だろう

等比級数との比較

$a_n = r^n$ から“隣との比” r を取り出すには？

- 漸化式: $a_{n+1} = r a_n \rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$
- 一般項: $a_n = r^n \rightarrow \sqrt[n]{a_n} = r$

→ 一般の数列 (a_n) に対しても、

$\frac{a_{n+1}}{a_n}$ や $\sqrt[n]{a_n}$ が大体 r くらいなら

振舞は同様だろう