

## 中間試験のお知らせ

**6月6日(月) 13:30 ~ 15:00**

**教室未定**

- **Taylor 展開を巡る諸々**  
(前の週(5/30)の講義内容まで)
- **学生証必携**

**詳細は追って**

## 前回提出の演習の答案へのコメント

- $\sum$  で無理に書く必要はない（が書くのも良い）
  - ★  $n = 0, 1$  辺りで確認を
  - ★ 感覚の行き来が重要
- $=$  は「両辺が等しい」ことを表す記号
  - ★ “式変形” の記号ではない!!
  - ★ 必要な  $+\dots$  を忘れない
  - ★ 極限操作 “ $\rightarrow$ ” との区別をせよ
- $\sin 1$  の近似値
  - ★ どこまでとれば大丈夫？
  - ★ 必要・意味のある桁と  
不要・意味のない桁との見極めが重要
- 自分で手を動かして計算せよ（数学は実技科目）

## 収束・発散の判定法

具体的な数列について、

収束・発散の判定をするには、

どうしたらよいだろうか？

→ 収束・発散が良く判っている級数と比較する  
(比較判定法)

## 比較判定法 (良く判っている級数と比較)

正項級数  $(a_n)_{n=0}^{\infty}, (b_n)_{n=0}^{\infty}$  について、

$\forall n : a_n \leq b_n$  のとき

- $\sum b_n : \text{収束} \implies \sum a_n : \text{収束}$
- $\sum a_n : \text{発散} \implies \sum b_n : \text{発散}$

- 途中からでも良い

( $\exists N : \forall n \geq N : a_n \leq b_n$  でも可)

- 定数倍しても良い

( $\exists C > 0 : \forall n : a_n \leq Cb_n$  でも可)

合わせて、

$\exists C > 0 : \exists N : \forall n \geq N : a_n \leq Cb_n$       でも可

## 比較判定法（良く判っている級数と比較）

典型的な「良く判っている級数」

… 等比級数  $a_n = r^n$

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1 + r + r^2 + r^3 + \dots$$

- $|r| < 1$  のとき収束し、その和は  $\frac{1}{1-r}$
- $|r| \geq 1$  のとき発散

→ 大体 |“隣との比”| < 1 くらいなら収束

## 等比級数との比較

$a_n = r^n$  から“隣との比”  $r$  を取り出すには？

- 漸化式： $a_{n+1} = r a_n \rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$
- 一般項： $a_n = r^n \rightarrow \sqrt[n]{a_n} = r$

→ 一般の数列  $(a_n)$  に対しても、

$\frac{a_{n+1}}{a_n}$  や  $\sqrt[n]{a_n}$  が大体  $r$  くらいなら

振舞は同様だろう

## d'Alembert の判定法 (比テスト)

正項級数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  について、

$$\left( \exists r < 1 : \forall n : \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq r \right) \implies \sum a_n : \text{収束}$$

特に、

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \longrightarrow \exists r \quad (\text{収束})$$

のとき、

- $r < 1 \implies$  収束
- $r > 1 \implies$  発散

## Cauchy の判定法 ( $n$ 乗根テスト )

正項級数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  について、

$$(\exists r < 1 : \forall n : \sqrt[n]{a_n} \leq r) \implies \sum a_n : \text{収束}$$

特に、

$$\sqrt[n]{a_n} \longrightarrow \exists r \quad (\text{収束})$$

のとき、

- $r < 1 \implies$  収束
- $r > 1 \implies$  発散



## 例題

次の級数が絶対収束するような  $x$  の範囲は？

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

$$(2) \sum_{n=0}^{\infty} n2^n x^n$$

$$(3) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$(4) \sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$$

## 典型的な強さ比較

$$\sqrt[n]{n} \longrightarrow 1 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

$$\frac{\log x}{x} \longrightarrow 0 \quad (x \longrightarrow +\infty)$$

$$\frac{x}{e^x} \longrightarrow 0 \quad (x \longrightarrow +\infty)$$

より一般に  $\forall a \in \mathbb{R}$  に対し、

$$\frac{x^a}{e^x} \longrightarrow 0 \quad (x \longrightarrow +\infty)$$

指数関数は多項式より遥かに強い!!

## d'Alembert の判定法 (比テスト)

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \longrightarrow \exists r \quad (\text{収束}) \text{ のとき、}$$

- $r < 1 \implies$  収束
- $r > 1 \implies$  発散

## Cauchy の判定法 (n 乗根テスト)

$$\sqrt[n]{a_n} \longrightarrow \exists r \quad (\text{収束}) \text{ のとき、}$$

- $r < 1 \implies$  収束
- $r > 1 \implies$  発散

で、 $r = 1$  の時は判定不能 (両方有り得る)

特に、単に

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \text{ または } \sqrt[n]{a_n} < 1$$

であっても、収束するとは限らない!!

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \exists r < 1 \text{ または } \sqrt[n]{a_n} < \exists r < 1$$

との違いに注意 !!

## 冪級数の収束判定

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$  が収束する  $x$  の範囲は？

- $\sum c_n x^n$  が  $x = x_0$  で収束  
 $\implies |x| < |x_0|$  で絶対収束
- $r := \sup \{ |x_0| \mid \sum c_n x^n \text{ が } x = x_0 \text{ で収束} \}$   
: 収束半径 (radius of convergence)

## 冪級数の収束判定

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$  が収束する  $x$  の範囲は？

- $\sum c_n x^n$  が  $x = x_0$  で収束  
 $\implies |x| < |x_0|$  で絶対収束
- $r := \sup \{ |x_0| \mid \sum c_n x^n \text{ が } x = x_0 \text{ で収束} \}$   
: 収束半径 (**radius of convergence**)

## 収束半径

$$r := \sup \left\{ |x_0| \mid \sum c_n x^n \text{が } x = x_0 \text{ で収束} \right\}$$

: 収束半径 (radius of convergence)

- $|x| < r \implies$  絶対収束
- $|x| > r \implies$  発散
- 全ての実数  $x$  に対し収束 ...  $r = \infty$  (便宜上)
- $x = 0$  でしか収束しない ...  $r = 0$

注:  $|x| = r$  では、収束・発散ともにあり得る

## 収束半径

$$r := \sup \left\{ |x_0| \mid \sum c_n x^n \text{ が } x = x_0 \text{ で収束} \right\}$$

: 収束半径 (radius of convergence)

- $|x| < r \implies$  絶対収束
- $|x| > r \implies$  発散
  
- 全ての実数  $x$  に対し収束 ...  $r = \infty$  (便宜上)
- $x = 0$  でしか収束しない ...  $r = 0$

注:  $|x| = r$  では、収束・発散ともにあり得る



## 収束半径

$$r := \sup \left\{ |x_0| \mid \sum c_n x^n \text{ が } x = x_0 \text{ で収束} \right\}$$

: 収束半径 (radius of convergence)

- $|x| < r \implies$  絶対収束
- $|x| > r \implies$  発散
  
- 全ての实数  $x$  に対し収束 ...  $r = \infty$  (便宜上)
- $x = 0$  でしか収束しない ...  $r = 0$

注:  $|x| = r$  では、収束・発散ともにあり得る

## 比テスト (d'Alembert の判定法):

$$\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} \longrightarrow \exists s \quad (\text{収束}) \text{ のとき、}$$

- $|x| < s^{-1} \implies$  収束
- $|x| > s^{-1} \implies$  発散

## n 乗根テスト (Cauchy の判定法):

$$\sqrt[n]{|c_n|} \longrightarrow \exists s \quad (\text{収束}) \text{ のとき、}$$

- $|x| < s^{-1} \implies$  収束
- $|x| > s^{-1} \implies$  発散

$s^{-1}$  : 収束半径