中間試験のお知らせ

6月6日(月) 13:30 〜 15:00

教室未定

- Taylor展開を巡る諸々
  （前の週 (5/30) の講義内容まで）
- 学生証必携

詳細は追って

前回提出の演習の答案へのコメント

- $\sum$ で無理に書く必要はない（が書くのも良い）
  - $\star$ $n = 0, 1$ 辺りで確認を
  - $\star$ 感覚の行き来が重要
- $=$ は「両辺が等しい」ことを表す記号
  - $\star$ “式変形” の記号ではない !!
  - $\star$ 必要な $+\cdots$ を忘れない
  - $\star$ 極限操作 “$\longrightarrow$” との区別をせよ
- $\sin 1$ の近似値
  - $\star$ どこまでとれば大丈夫？
  - $\star$ 必要・意味のある桁と
    不要・意味のない桁との見極めが重要
- 自分で手を動かして計算せよ（数学は実技科目）

収束・発散の判定法

具体的な数列について、

収束・発散の判定をするには、

どうしたらよいだろうか？

$\longrightarrow$ 収束・発散が良く判っている級数と比較する

（比較判定法）

<u>比較判定法</u>（良く判っている級数と比較）

正項級数 $(a_n)_{n=0}^{\infty}, (b_n)_{n=0}^{\infty}$ **について、**

$\forall n : a_n \leq b_n$ **のとき**

- $\sum b_n$ **：収束** $\Longrightarrow \sum a_n$ **：収束**
- $\sum a_n$ **：発散** $\Longrightarrow \sum b_n$ **：発散**

  - **途中からでも良い**
    ($\exists N : \forall n \geq N : a_n \leq b_n$ **でも可)**
  - **定数倍しても良い**
    ($\exists C > 0 : \forall n : a_n \leq Cb_n$ **でも可)**

合わせて、

$\exists C > 0 : \exists N : \forall n \geq N : a_n \leq Cb_n$ **でも可**

比較判定法（良く判っている級数と比較）

典型的な「良く判っている級数」

$\cdots$ **等比級数** $a_n = r^n$

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots$$

- $|r| < 1$ **のとき収束し、その和は** $\dfrac{1}{1-r}$
- $|r| \geq 1$ **のとき発散**

$\longrightarrow$ **大体** $|$**“隣との比”**$| < 1$ **くらいなら収束**

等比級数との比較

$a_n = r^n$ **から "隣との比" r を取り出すには？**

- **漸化式：** $a_{n+1} = ra_n \to \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = r$
- **一般項：** $a_n = r^n \to \sqrt[n]{a_n} = r$

$\longrightarrow$ **一般の数列** (a_n) **に対しても、**

$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ **や** $\sqrt[n]{a_n}$ **が大体** r **くらいなら**

振舞は同様だろう

d'Alembert の判定法（比テスト）

正項級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ **について、**

$$\boxed{\left(\exists r < 1 : \forall n : \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq r\right) \Longrightarrow \sum a_n : \textbf{収束}}$$

特に、

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \longrightarrow \exists r \quad \textbf{（収束）}$$

のとき、

- $r < 1 \Longrightarrow$ **収束**
- $r > 1 \Longrightarrow$ **発散**

Cauchy の判定法（n 乗根テスト）

正項級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ **について、**

$$\boxed{(\exists r < 1 : \forall n : \sqrt[n]{a_n} \leq r) \Longrightarrow \sum a_n \text{：収束}}$$

特に、

$$\sqrt[n]{a_n} \longrightarrow \exists r \quad \text{（収束）}$$

のとき、

- $r < 1 \Longrightarrow$ **収束**
- $r > 1 \Longrightarrow$ **発散**

例題

次の級数が絶対収束するような x の範囲は？

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

(2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n2^n x^n$

(3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

(4) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$

典型的な強さ比較

$$\sqrt[n]{n} \longrightarrow 1 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

$$\frac{\log x}{x} \longrightarrow 0 \quad (x \longrightarrow +\infty)$$

$$\frac{x}{e^x} \longrightarrow 0 \quad (x \longrightarrow +\infty)$$

より一般に $\forall a \in \mathbb{R}$ **に対し、**

$$\frac{x^a}{e^x} \longrightarrow 0 \quad (x \longrightarrow +\infty)$$

指数関数は多項式より遥かに強い !!

d'Alembert の判定法（比テスト）

$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \longrightarrow \exists r$ **（収束）のとき、**

- $r < 1 \Longrightarrow$ **収束**
- $r > 1 \Longrightarrow$ **発散**

Cauchy の判定法（n 乗根テスト）

$\sqrt[n]{a_n} \longrightarrow \exists r$ **（収束）のとき、**

- $r < 1 \Longrightarrow$ **収束**
- $r > 1 \Longrightarrow$ **発散**

で、$r = 1$ の時は判定不能（両方有り得る）

特に、単に

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \text{ または } \sqrt[n]{a_n} < 1$$

であっても、収束するとは限らない !!

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \exists r < 1 \text{ または } \sqrt[n]{a_n} < \exists r < 1$$

との違いに注意 !!

冪級数の収束判定

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \text{ が収束する } x \text{ の範囲は？}$$

- $\sum c_n x^n$ が $x = x_0$ で収束
  $\Longrightarrow |x| < |x_0|$ で絶対収束
- $r := \sup\{|x_0| \mid \sum c_n x^n$が $x = x_0$ で収束$\}$
  ：**収束半径** (**radius of convergence**)

収束半径

$$r := \sup\left\{ |x_0| \,\middle|\, \sum c_n x^n \text{が } x = x_0 \text{ で収束} \right\}$$

：**収束半径 (radius of convergence)**

- $|x| < r \Longrightarrow$ **絶対収束**
- $|x| > r \Longrightarrow$ **発散**

- **全ての実数** x **に対し収束** $\cdots$ $r = \infty$ **（便宜上）**
- $x = 0$ **でしか収束しない** $\cdots$ $r = 0$

注：$|x| = r$ **では、収束・発散ともにあり得る**

比テスト（d’Alembert の判定法）：

$$\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} \longrightarrow \exists s \quad \textbf{（収束）のとき、}$$

- $|x| < s^{-1} \Longrightarrow$ **収束**
- $|x| > s^{-1} \Longrightarrow$ **発散**

n 乗根テスト（Cauchy の判定法）：

$$\sqrt[n]{|c_n|} \longrightarrow \exists s \quad \textbf{（収束）のとき、}$$

- $|x| < s^{-1} \Longrightarrow$ **収束**
- $|x| > s^{-1} \Longrightarrow$ **発散**

s^{-1} **：収束半径**