中間試験のお知らせ

6 月 6 日 (月) 13:30 〜 15:00

11-704 教室・11-719 教室
（2 教室に分かれて実施）

- Taylor 展開を巡る諸々
  （前の週 (5/30) の講義内容まで）
- 学生証必携

詳細は追って

さて、今回は、

大学の数学の講義らしく

ちゃんと定理の証明をします。

本講義では、中間試験後にもう一回、
ちゃんと定理の証明をする回がある予定

Taylor 展開の問題点（考えなくてはならないこと）

- 級数が収束するか？
- 収束したら元の関数と一致するか？
- 誤差の理論的評価は？
- 項別微積分（極限操作の順序交換）を行なってよいか？

$\longrightarrow$ “Taylor の定理”

Taylor 展開の剰余項

“形式的” Taylor 展開

$$f(x) \sim f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \cdots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

で、右辺の和が収束する時、

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \left(= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \right) = f(x)$$

であるか？

Taylor 展開の剰余項

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(x)$$

$$\Updownarrow$$

$$\left|f(x)-\sum_{n=0}^{N}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n\right| \longrightarrow 0 \quad (N\to\infty)$$

$$R_N(f;x) := f(x)-\sum_{n=0}^{N-1}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

：N 次の剰余項 (remainder)

Taylor 展開の剰余項

形式的 Taylor 展開が収束して、元の関数 $f(x)$ と一致

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

$$\Updownarrow$$

$$|R_N(f;x)| \longrightarrow 0 \quad (N \longrightarrow \infty)$$

$\longrightarrow$ **剰余項 $R_N(f;x)$ の評価 (estimate) が問題**

Taylor の定理

f：N **回微分可能 (**$N \geq 1$**)**

$$R_N(f;x) := f(x) - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

とするとき、

$$0 < \exists\theta < 1 : R_N(f;x) = \frac{f^{(N)}(\theta x)}{N!} x^N$$

$$0 < \exists\theta < 1 : R_N(f; x) = \frac{f^{(N)}(\theta x)}{N!} x^N$$

系

（1 つ取って固定した x に対して）

$\exists C > 0 : \forall N : 0 < \forall\theta < 1 : |f^{(N)}(\theta x)| < C^N$

$\Longrightarrow |R_N(f; x)| \longrightarrow 0 \;\; (N \longrightarrow \infty)$

従って、

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

注

$N = 1$ のときは、何を言っているのか？

$$0 < \exists\theta < 1 : R_1(f; x) = f'(\theta x)x$$

つまり

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(\theta x)$$

$\cdots$ **（Lagrange の）平均値の定理**

$\boxed{\textbf{Taylor の定理} \cdots \textbf{平均値の定理の高次版}}$

Taylor の定理の証明の方針

平均値の定理を 次々と繰り返し用いて
次数を上げていく

数学的帰納法 の形で証明を記述すると明快

"帰納法の仮定" を f' に 適用
($(f', N-1) \Longrightarrow (f, N)$ の流れ)

Taylorの定理の証明の方針

簡潔な証明のためには、

「平均値の定理」を少し一般化しておく必要有り
（Cauchyの平均値の定理）

ここでは、その元になる基本的な

「Rolleの定理」

から見ていこう

Rolle の定理

f：**閉区間** $[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$ **で連続**

開区間 $(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$ **で微分可能**

$f(a) = f(b)$

$$\Longrightarrow \qquad \exists c \in (a, b) : f'(c) = 0$$

Rolle の定理（証明の概略）

f **:** $[a, b]$ **で連続、** (a, b) **で微分可能、** $f(a) = f(b)$
$\Longrightarrow \exists c \in (a, b) : f'(c) = 0$

- $[a, b]$ **で連続な関数には最大値・最小値が存在**
  $\longleftarrow$ **実数の基本性質が必要**
- **最大値・最小値を取る点** $x = c$ **で** $f'(c) = 0$
  $\longleftarrow$ **微分係数の定義**

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

で、分母分子の符号を見よ

Cauchy の平均値の定理

f, g **：共に 閉区間** $[a, b]$ **で連続**
閉区間 (a, b) **で微分可能**

- $\not\exists c \in (a, b) : f'(c) = g'(c) = 0$
- $g(a) \neq g(b)$

$$\Longrightarrow \qquad \exists c \in (a, b) : \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

注：$g(x) = x$ **の時が Lagrange の平均値の定理**

Cauchy の平均値の定理（証明の舞台裏）

f, g：共に $[a, b]$ で連続、(a, b) で微分可能

- $\not\exists c \in (a, b) : f'(c) = g'(c) = 0$
- $g(a) \neq g(b)$

$$\Longrightarrow \exists c \in (a, b) : \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Rolle の定理で見付かる $h'(c) = 0$ となる c が
所望の c になるような関数 h が作れれば良い

$$(g(b) - g(a))f'(c) - (f(b) - f(a))g'(c) = 0$$

$$h'(x) = (g(b) - g(a))f'(x) - (f(b) - f(a))g'(x)$$

となる h を考えよう

Taylor の定理

f：N **回微分可能 (**$N \geq 1$**)**

$$R_N(f;x) := f(x) - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

とするとき、

$$0 < \exists\theta < 1 : R_N(f;x) = \frac{f^{(N)}(\theta x)}{N!} x^N$$

$$0 < \exists\theta < 1 : R_N(f;x) = \frac{f^{(N)}(\theta x)}{N!}x^N$$

系

（1 **つ取って固定した** x **に対して）**

$\exists C > 0 : \forall N : 0 < \forall\theta < 1 : |f^{(N)}(\theta x)| < C^N$

$\Longrightarrow R_N(f;x) \longrightarrow 0 \ (N \longrightarrow \infty)$

従って、

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Taylor の定理（証明の方針）

$$0 < \exists\theta < 1 : R_N(f;x) = \frac{f^{(N)}(\theta x)}{N!}x^N$$

数学的帰納法：“帰納法の仮定” を f' に 適用
（$(f', N-1) \Longrightarrow (f, N)$ の流れ）

準備： $R_N(f;0) = 0, \quad R'_N(f;x) = R_{N-1}(f';x)$

Cauchy の平均値の定理を用いて次数を上げていく

作戦：Cauchy の平均値の定理の f, g をどう取る？

演習問題

$f(x) = e^x$ の Taylor 展開の剰余項 $R_N(f;x)$ について、

(1) $|R_N(f;1)| < 10^{-4}$ となる
（出来ればなるべく小さい）N を与えよ

(2) e の近似値を小数第 3 位まで求めよ

(3) 誤差が 10^{-3} 以下であることを保証せよ
（丸め誤差・打切誤差の双方を考慮に入れよ）

意欲のある人は小数第 5 位まで求めてみよう
（その場合、(1) の部分はどうすれば良い？）