中間試験のお知らせ

6月6日(月) 13:30 〜 15:00

11-704教室・11-719教室（2教室に分かれて実施）

- Taylor展開を巡る諸々（今日の講義内容まで）

- 学生証必携・座席指定
- 記名用のペンも持参のこと
- 以前配布した「Taylor展開の例」の表の必要部分は試験時にも配布する

Taylor 展開の問題点（考えなくてはならないこと）

- **級数が収束するか？**
- **収束したら元の関数と一致するか？**
- **誤差の理論的評価は？**
- **項別微積分（極限操作の順序交換）を行なってよいか？**

$\longrightarrow$ **“Taylor の定理”**

Taylor 展開の剰余項

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(x)$$

$$\Updownarrow$$

$$\left|f(x)-\sum_{n=0}^{N}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n\right| \longrightarrow 0 \quad (N\to\infty)$$

$$R_N(f;x) := f(x)-\sum_{n=0}^{N-1}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

：N 次の**剰余項 (remainder)**

Taylor 展開の剰余項

形式的 Taylor 展開が収束して、元の関数 $f(x)$ と一致

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

$$\Updownarrow$$

$$|R_N(f;x)| \longrightarrow 0 \quad (N \longrightarrow \infty)$$

$\longrightarrow$ **剰余項** $R_N(f;x)$ **の評価 (estimate) が問題**

Taylor の定理

f：N **回微分可能** ($N \geq 1$)

$$R_N(f;x) := f(x) - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

とするとき、

$$0 < \exists\theta < 1 : R_N(f;x) = \frac{f^{(N)}(\theta x)}{N!} x^N$$

$$0 < \exists\theta < 1 : R_N(f;x) = \frac{f^{(N)}(\theta x)}{N!}x^N$$

系

（1 つ取って固定した x に対して）

$\exists C > 0 : \forall N : 0 < \forall\theta < 1 : |f^{(N)}(\theta x)| < C^N$

$\Longrightarrow |R_N(f;x)| \longrightarrow 0 \ (N \longrightarrow \infty)$

従って、

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

典型的な強さ比較

$$\sqrt[n]{n} \longrightarrow 1 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

$$\frac{\log x}{x} \longrightarrow 0 \quad (x \longrightarrow +\infty)$$

$$\frac{x}{e^x} \longrightarrow 0 \quad (x \longrightarrow +\infty)$$

より一般に $\forall a \in \mathbb{R}$ に対し、

$$\frac{x^a}{e^x} \longrightarrow 0 \quad (x \longrightarrow +\infty)$$

指数関数は多項式より遥かに強い !!

演習問題

$f(x) = e^x$ の Taylor 展開の剰余項 $R_N(f;x)$ について、

(1) $|R_N(f;1)| < 10^{-4}$ となる
（出来ればなるべく小さい）N を与えよ

(2) e の近似値を小数第 3 位まで求めよ

(3) 誤差が 10^{-3} 以下であることを保証せよ
（丸め誤差・打切誤差の双方を考慮に入れよ）

意欲のある人は小数第 5 位まで求めてみよう
（その場合、(1) の部分はどうすれば良い？）

n	$1/n!$			
0	1			
1	1			
2	0.5			
3	$0.16666\cdots$			
4	$0.04166\cdots$			
5	$0.00833\cdots$			
6	$0.00138\cdots$		**丸め誤差**	**(**$\times 5$**)**
7	$0.00019\cdots$	$\uparrow$	**各**	$< 10^{-4}$
8	$0.00002\cdots$	$\downarrow$	**打切誤差**	$< 10^{-4}$
	$\cdots$			

n	1/n!			
0	1	**四捨五入して**		
1	1	• **各々の誤差を半分に**		
2	0.5	• **誤差が打ち消し合うように**		
3	0.1667			
4	0.0417			
5	0.0083			
6	0.0014		**丸め誤差**	**(**$\times 5$**)**
7	0.0002	$\uparrow$	**各**	$< 0.5 \times 10^{-4}$
8	0.0000	$\downarrow$	**打切誤差**	$< 10^{-4}$
	...			
	2.7183		**誤差**	$< 3.5 \times 10^{-4} < 10^{-3}$
$\fallingdotseq$	2.718			

Taylor 展開の問題点（考えなくてはならないこと）

- **級数が収束するか？**
- **収束したら元の関数と一致するか？**
- **誤差の理論的評価は？**
- **項別微積分（極限操作の順序交換）を行なってよいか？**

Taylor 展開の問題点（考えなくてはならないこと）

- 級数が収束するか？
- 収束したら元の関数と一致するか？
- 誤差の理論的評価は？
- 項別微積分（極限操作の順序交換）を行なってよいか？

項別微積分（極限操作の順序交換）

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$ **($|x| < r$) のとき**

$$\int_{t=0}^{x} f(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

（特に右辺は $|x| < r$ で絶対収束）

$$
\begin{tikzcd}
\left(a_n x^n\right)_{n=0}^{\infty} \arrow[rr, "\text{項別微分}"] \arrow[d, "\text{有限和}"'] & & \left(n a_n x^{n-1}\right)_{n=1}^{\infty} \arrow[d, "\text{有限和}"] \\
\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{N} a_n x^n\right)_{N=0}^{\infty} \arrow[rr, "\text{項別微分}", "=\text{微分}"'] \arrow[d, "N\to\infty"'] & & \left(\displaystyle\sum_{n=1}^{N} n a_n x^{n-1}\right)_{N=1}^{\infty} \arrow[d, "N\to\infty"] \\
\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \arrow[rr, "\text{微分}"'] & & \dfrac{d}{dx}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \overset{?}{=} \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}
\end{tikzcd}
$$

極限操作が非可換な例

$$
\begin{tikzcd}
\left(\dfrac{x^2}{1+x^2}\right)^N \arrow[r, "N\to\infty"] \arrow[d, "x\to+\infty"'] & 0 \arrow[d, "x\to+\infty"] \\
1 \arrow[r, "N\to\infty"] & ?
\end{tikzcd}
$$

$$\lim_{N\to\infty}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^N \neq \lim_{x\to+\infty}\lim_{N\to\infty}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^N$$

極限操作が非可換な例

$$\begin{array}{ccc}
\left(\dfrac{x^2}{1+x^2}\right)^N & \xrightarrow{N\to\infty} & 0 \\
{\scriptstyle x\to+\infty}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle x\to+\infty} \\
1 & \xrightarrow{N\to\infty} & \color{red}{?}
\end{array}$$

$$\lim_{N\to\infty}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^N \color{red}{\neq} \lim_{x\to+\infty}\lim_{N\to\infty}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^N$$

例：二項展開（a は任意の実数で可）

$$(1+x)^a \sim \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n$$

$$= 1 + ax + \cdots + \binom{a}{n} x^n + \cdots$$

$$\binom{a}{n} = \frac{a(a-1)\cdot\cdots\cdot(a-n+1)}{n(n-1)\cdot\cdots\cdot 1}$$

：二項係数 (binomial coefficient)

この展開の収束半径・剰余項の評価は？

例：二項展開（a は任意の実数で可）

$$(1+x)^a \sim \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n$$

$$= 1 + ax + \cdots + \binom{a}{n} x^n + \cdots$$

$$\binom{a}{n} = \frac{a(a-1)\cdot\cdots\cdot(a-n+1)}{n(n-1)\cdot\cdots\cdot 1}$$

：二項係数 (binomial coefficient)

この展開の収束半径・剰余項の評価は？

例：二項展開（a は任意の実数で可）

$$(1+x)^a \sim \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n$$

$$\binom{a}{n} = \frac{a(a-1)\cdot\cdots\cdot(a-n+1)}{n(n-1)\cdot\cdots\cdot 1}$$

収束半径：

$$\left| \frac{\binom{a}{n+1}}{\binom{a}{n}} \right| = \left| \frac{a-n}{n+1} \right| \to 1 \ (n \to \infty)$$

より、収束半径 $1^{-1} = 1$ **（**$|x| < 1$ **で絶対収束）**

例：二項展開（a は任意の実数で可）

剰余項：$|x| < 1$ **に対して、**

$$
\begin{aligned}
R_N(f;x) &= \frac{f^{(N)}(\theta x)}{N!}x^N \\
&= \binom{a}{N}(1+\theta x)^{a-N}x^N
\end{aligned}
$$

（特に x が -1 に近いとき）直接の評価が困難

実際 $a < 0$ **のときは、** N**：固定,** $x \to -1$ **で発散**

$\longrightarrow$ **項別微積分を使って示そう**

例：二項展開（a は任意の実数で可）

剰余項：$|x| < 1$ **に対して、**

$$
\begin{aligned}
R_N(f;x) &= \frac{f^{(N)}(\theta x)}{N!}x^N \\
&= \binom{a}{N}(1+\theta x)^{a-N}x^N
\end{aligned}
$$

（特に x **が** -1 **に近いとき）直接の評価が困難**

実際 $a < 0$ **のときは、** N**：固定**, $x \to -1$ **で発散**

$\longrightarrow$ **項別微積分を使って示そう**

例：二項展開（a は任意の実数で可）

剰余項：$|x| < 1$ **に対して、**

$$\begin{aligned} R_N(f;x) &= \frac{f^{(N)}(\theta x)}{N!}x^N \\ &= \binom{a}{N}(1+\theta x)^{a-N}x^N \end{aligned}$$

（特に x **が** -1 **に近いとき）直接の評価が困難**

実際 $a < 0$ **のときは、** N**：固定,** $x \to -1$ **で発散**

$\longrightarrow$ **項別微積分を使って示そう**