

## 中間試験のお知らせ

6月6日(月) 13:30 ~ 15:00

11-704 教室・11-719 教室  
(2教室に分かれて実施)

- Taylor 展開を巡る諸々(今日の講義内容まで)
- 学生証必携・座席指定
- 記名用のペンも持参のこと
- 以前配布した「Taylor 展開の例」の表の  
必要部分は試験時にも配布する

## Taylor 展開の問題点（考えなくてはならないこと）

- 級数が収束するか？
- 収束したら元の関数と一致するか？
- 誤差の理論的評価は？
- 項別微積分（極限操作の順序交換）を  
行なってよいか？

→ “Taylor の定理”

## Taylor 展開の剰余項

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(x)$$



$$\left| f(x) - \sum_{n=0}^N \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \right| \longrightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty)$$

$$R_N(f; x) := f(x) - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

: N 次の剰余項 (remainder)

## Taylor 展開の剰余項

形式的 Taylor 展開が収束して、元の関数  $f(x)$  と一致

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$



$$|R_N(f; x)| \longrightarrow 0 \quad (N \longrightarrow \infty)$$

→ 剰余項  $R_N(f; x)$  の評価 (estimate) が問題

## Taylor の定理

$f : \mathbb{N}$  回微分可能 ( $N \geq 1$ )

$$R_N(f; x) := f(x) - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

とするとき、

$$0 < \exists \theta < 1 : R_N(f; x) = \frac{f^{(N)}(\theta x)}{N!} x^N$$

$$0 < \exists \theta < 1 : R_N(f; x) = \frac{f^{(N)}(\theta x)}{N!} x^N$$

---

系

(1 つ取って固定した  $x$  に対して)

$$\exists C > 0 : \forall N : 0 < \forall \theta < 1 : |f^{(N)}(\theta x)| < C^N$$

$$\implies |R_N(f; x)| \longrightarrow 0 \quad (N \longrightarrow \infty)$$

従って、

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

## 典型的な強さ比較

$$\sqrt[n]{n} \longrightarrow 1 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

$$\frac{\log x}{x} \longrightarrow 0 \quad (x \longrightarrow +\infty)$$

$$\frac{x}{e^x} \longrightarrow 0 \quad (x \longrightarrow +\infty)$$

より一般に  $\forall a \in \mathbb{R}$  に対し、

$$\frac{x^a}{e^x} \longrightarrow 0 \quad (x \longrightarrow +\infty)$$

**指数関数は多項式より遥かに強い!!**

## 演習問題

$f(x) = e^x$  の Taylor 展開の剰余項  $R_N(f; x)$  について、

- (1)  $|R_N(f; 1)| < 10^{-4}$  となる  
(出来ればなるべく小さい)  $N$  を与えよ
- (2)  $e$  の近似値を小数第 3 位まで求めよ
- (3) 誤差が  $10^{-3}$  以下であることを保証せよ  
(丸め誤差・打切誤差の双方を考慮に入れよ)

意欲のある人は小数第 5 位まで求めてみよう  
(その場合、(1) の部分はどうすれば良い?)



n	1/n!			
0	1			
1	1			
2	0.5			
3	0.16666...			
4	0.04166...			
5	0.00833...			
6	0.00138...		丸め誤差	( $\times 5$ )
7	0.00019...	↑	各	$< 10^{-4}$
8	0.00002...	↓	打切誤差	$< 10^{-4}$
...	...			

n	1/n!	
0	1	四捨五入して
1	1	● 各々の誤差を半分に
2	0.5	● 誤差が打ち消し合うように
3	0.1667	
4	0.0417	
5	0.0083	
6	0.0014	丸め誤差 (×5)
7	0.0002	↑ 各 $< 0.5 \times 10^{-4}$
8	0.0000	↓ 打切誤差 $< 10^{-4}$
...		
	2.7183	誤差 $< 3.5 \times 10^{-4} < 10^{-3}$
	$\approx 2.718$	

## Taylor 展開の問題点（考えなくてはならないこと）

- 級数が収束するか？
- 収束したら元の関数と一致するか？
- 誤差の理論的評価は？
- 項別微積分（極限操作の順序交換）を行なってよいか？

## 項別微積分（極限操作の順序交換）

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (|x| < r) \text{ のとき}$$

$$\int_{t=0}^x f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

（特に右辺は  $|x| < r$  で絶対収束）

$$\begin{array}{ccc}
 (a_n x^n)_{n=0}^{\infty} & \xrightarrow{\text{項別微分}} & (n a_n x^{n-1})_{n=1}^{\infty} \\
 \downarrow \text{有限和} & & \downarrow \text{有限和} \\
 \left( \sum_{n=0}^N a_n x^n \right)_{N=0}^{\infty} & \xrightarrow[\text{=微分}]{\text{項別微分}} & \left( \sum_{n=1}^N n a_n x^{n-1} \right)_{N=1}^{\infty} \\
 \downarrow N \rightarrow \infty & & \downarrow N \rightarrow \infty \\
 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n & \xrightarrow{\text{微分}} & \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \stackrel{?}{=} \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}
 \end{array}$$

## 極限操作が非可換な例

$$\begin{array}{ccc} \left( \frac{x^2}{1+x^2} \right)^N & \xrightarrow{N \rightarrow \infty} & 0 \\ \downarrow x \rightarrow +\infty & & \downarrow x \rightarrow +\infty \\ 1 & \xrightarrow{N \rightarrow \infty} & ? \end{array}$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2}{1+x^2} \right)^N \neq \lim_{x \rightarrow +\infty} \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2}{1+x^2} \right)^N$$

例：二項展開 ( $a$  は任意の実数で可)

$$(1+x)^a \sim \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n$$
$$= 1 + ax + \dots + \binom{a}{n} x^n + \dots$$

$$\binom{a}{n} = \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n(n-1)\dots 1}$$

: 二項係数 (**binomial coefficient**)

この展開の収束半径・剰余項の評価は？

例：二項展開 ( $a$  は任意の実数で可)

$$(1+x)^a \sim \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n$$

$$\binom{a}{n} = \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n(n-1)\cdots 1}$$

収束半径：

$$\left| \frac{\binom{a}{n+1}}{\binom{a}{n}} \right| = \left| \frac{a-n}{n+1} \right| \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty)$$

より、収束半径  $1^{-1} = 1$  ( $|x| < 1$  で絶対収束)



例：二項展開 ( $a$  は任意の実数で可)

剰余項： $|x| < 1$  に対して、

$$\begin{aligned}R_N(f; x) &= \frac{f^{(N)}(\theta x)}{N!} x^N \\ &= \binom{a}{N} (1 + \theta x)^{a-N} x^N\end{aligned}$$

(特に  $x$  が  $-1$  に近いとき) 直接の評価が困難

実際  $a < 0$  のときは、 $N$  : 固定,  $x \rightarrow -1$  で発散

→ 項別微積分を使って示そう