中間試験は鋭意採点中

後半の主な内容は積分だが、

今日は　幕間 (intermission)

その前にちょっと補足

中間試験は鋭意採点中

後半の主な内容は積分だが、

今日は　幕間 (intermission)

その前にちょっと補足

d'Alembert の判定法（比テスト）

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \longrightarrow \exists r$$ （収束）のとき、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は、

- $r < 1 \Longrightarrow$ 収束
- $r > 1 \Longrightarrow$ 発散

Cauchy の判定法（n 乗根テスト）

$$\sqrt[n]{a_n} \longrightarrow \exists r$$ （収束）のとき、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は、

- $r < 1 \Longrightarrow$ 収束
- $r > 1 \Longrightarrow$ 発散

で、$r = 1$ の時は判定不能（両方有り得る）

特に、単に

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \ \textbf{または} \ \sqrt[n]{a_n} < 1$$

であっても、 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ **が収束するとは限らない !!**

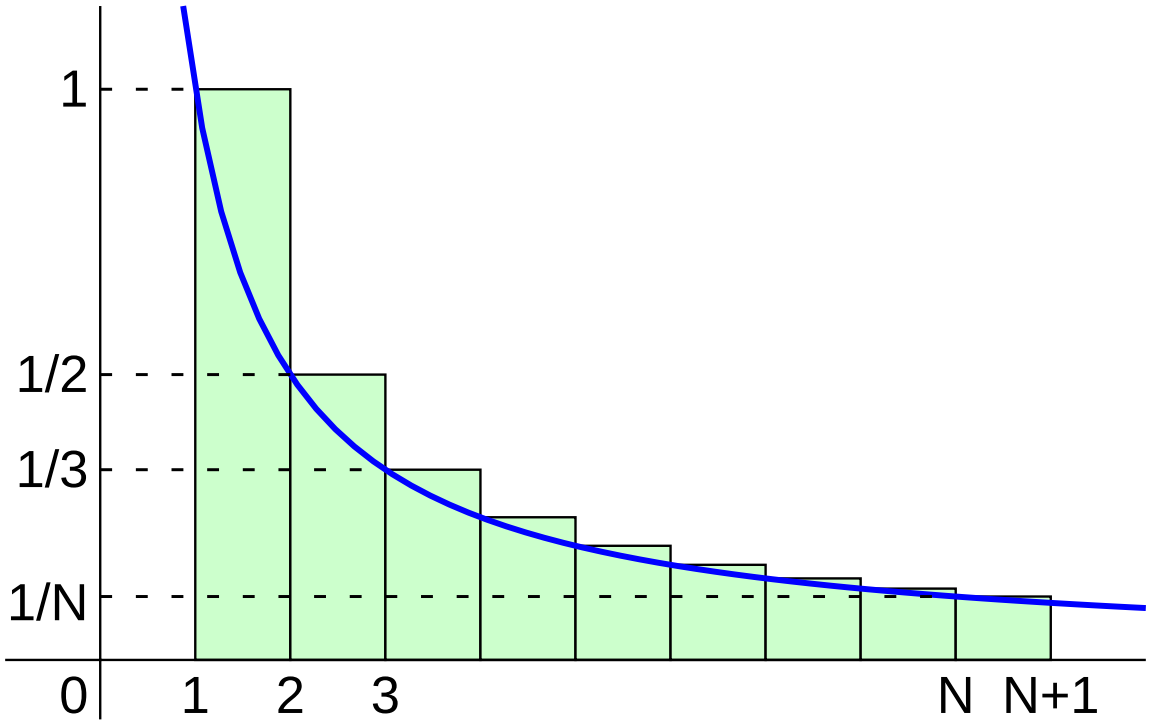
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \exists r < 1 \ \textbf{または} \ \sqrt[n]{a_n} < \exists r < 1$$

との違いに注意 !!

例：調和級数

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} > \int_{1}^{N+1} \frac{dx}{x}$$

$$= \log(N+1) \to +\infty \quad (N \to \infty)$$



実際、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} : \text{発散} \qquad \text{だが、} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} : \text{収束}$$

実は、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} : \begin{cases} s \leq 1 \Longrightarrow \text{発散} \\ s > 1 \Longrightarrow \text{収束} \end{cases}$$

$\longrightarrow$ $s > 1$ で s の関数を定めている

実際、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} : \text{発散} \qquad \text{だが、} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} : \text{収束}$$

実は、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} : \begin{cases} s \leq 1 \Longrightarrow \text{発散} \\ s > 1 \Longrightarrow \text{収束} \end{cases}$$

$\longrightarrow$ $s > 1$ で s の関数を定めている

実際、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} : \text{発散} \qquad \text{だが、} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} : \text{収束}$$

実は、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} : \begin{cases} s \leq 1 \Longrightarrow \text{発散} \\ s > 1 \Longrightarrow \text{収束} \end{cases}$$

$\longrightarrow$ $s > 1$ **で** s **の関数を定めている**

Riemann のゼータ関数

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad : s > 1 \text{ で絶対収束}$$

（この範囲で s の関数を定めている）

$\cdots$ **Riemann のゼータ関数**

“Millenium Prize” の 7 つの問題の 1 つ

「Riemann 予想」

は、この $\zeta(s)$ の性質に関すること

$\longrightarrow$ 素数分布などと関連

Riemann のゼータ関数

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad : s > 1 \text{ で絶対収束}$$

（この範囲で s の関数を定めている）

$\cdots$ Riemann のゼータ関数

“Millenium Prize” の 7 つの問題の 1 つ

「Riemann 予想」

は、この $\zeta(s)$ の性質に関すること

$\longrightarrow$ 素数分布などと関連

Riemann のゼータ関数の特殊値（お話）

Euler（18 世紀）：

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$$

$$\zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}$$

$$\vdots$$

$$\zeta(2m) = (\textbf{有理数}) \times \pi^{2m}$$

$$(m = 1, 2, 3, \ldots)$$

Riemann のゼータ関数の特殊値（お話）

- $\zeta(3)$：有理数でない (Apéry, 1978)
- $\zeta(2m+1)$ 達の中に無理数が無限個 (Rivoal, 2000)
- $\zeta(5), \zeta(7), \ldots, \zeta(21)$ の中の少なくとも 1 つは無理数 (Rivoal, 2001)
- $\zeta(5), \zeta(7), \zeta(9), \zeta(11)$ の中の少なくとも 1 つは無理数 (Zudilin, 2001)

$\longrightarrow$ これらの値（特殊値）の数論的性質は現在でも大きな研究テーマ

Taylor 展開の問題点（考えなくてはならないこと）

- 級数が収束するか？
- 収束したら元の関数と一致するか？
- 誤差の理論的評価は？
- 項別微積分（極限操作の順序交換）を行なってよいか？

形式的 Taylor 展開が収束しても、元の関数と一致しない例

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ e^{-\frac{1}{x}} & (x > 0) \end{cases}$$

実は、 $f^{(n)}(0) = 0$ **(**$n = 0, 1, 2, \ldots$**)**

従って、形式的 Taylor 展開は 0

しかし勿論 $x > 0$ **では** $f(x) \neq 0$

形式的 Taylor 展開が収束しても、元の関数と一致しない例

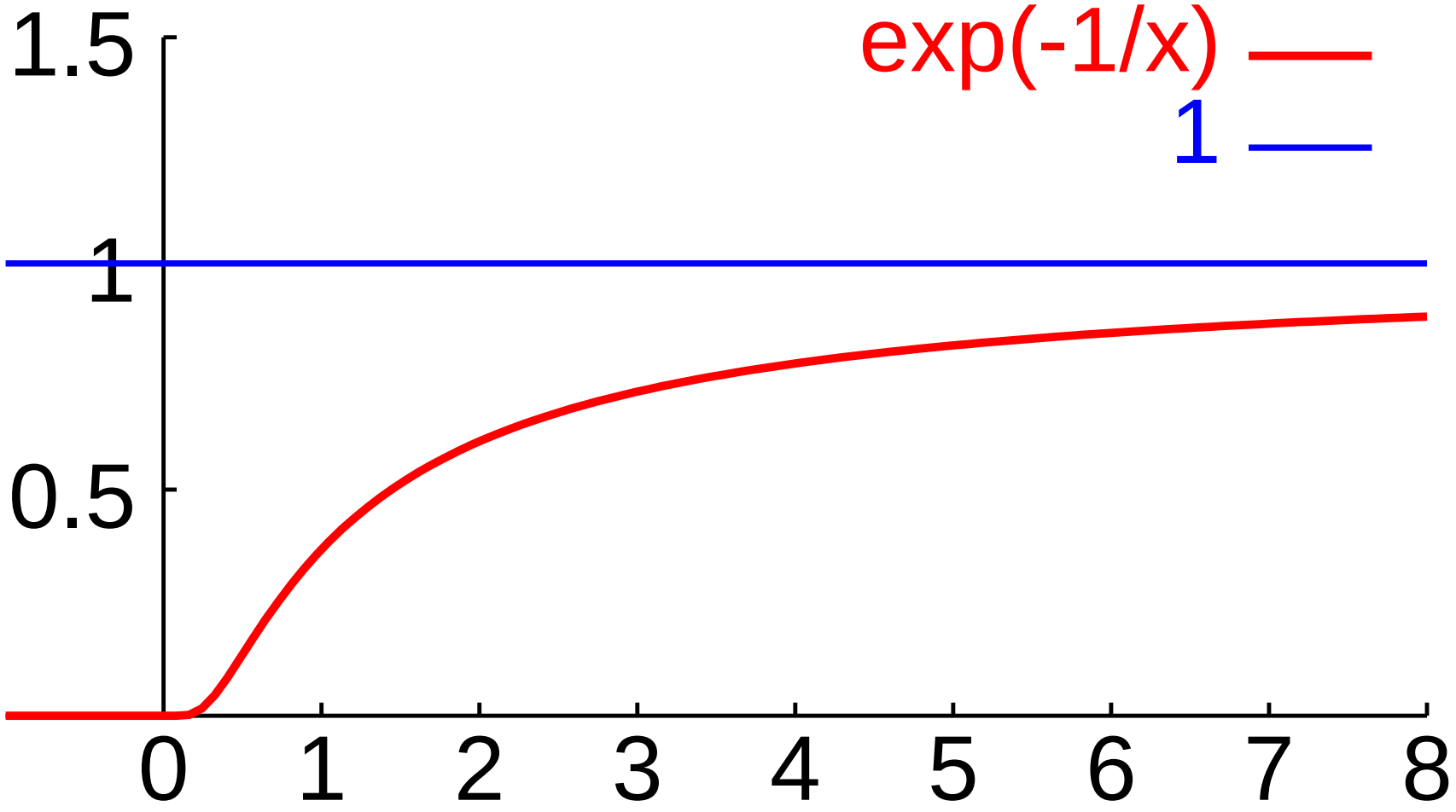
$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ e^{-\frac{1}{x}} & (x > 0) \end{cases}$$

実は、 $f^{(n)}(0) = 0$ **(**$n = 0, 1, 2, \ldots$**)**

従って、形式的 Taylor 展開は 0

しかし勿論 $x > 0$ **では** $f(x) \neq 0$

形式的 Taylor 展開が収束しても、元の関数と一致しない例



さてさて、幕間のお話

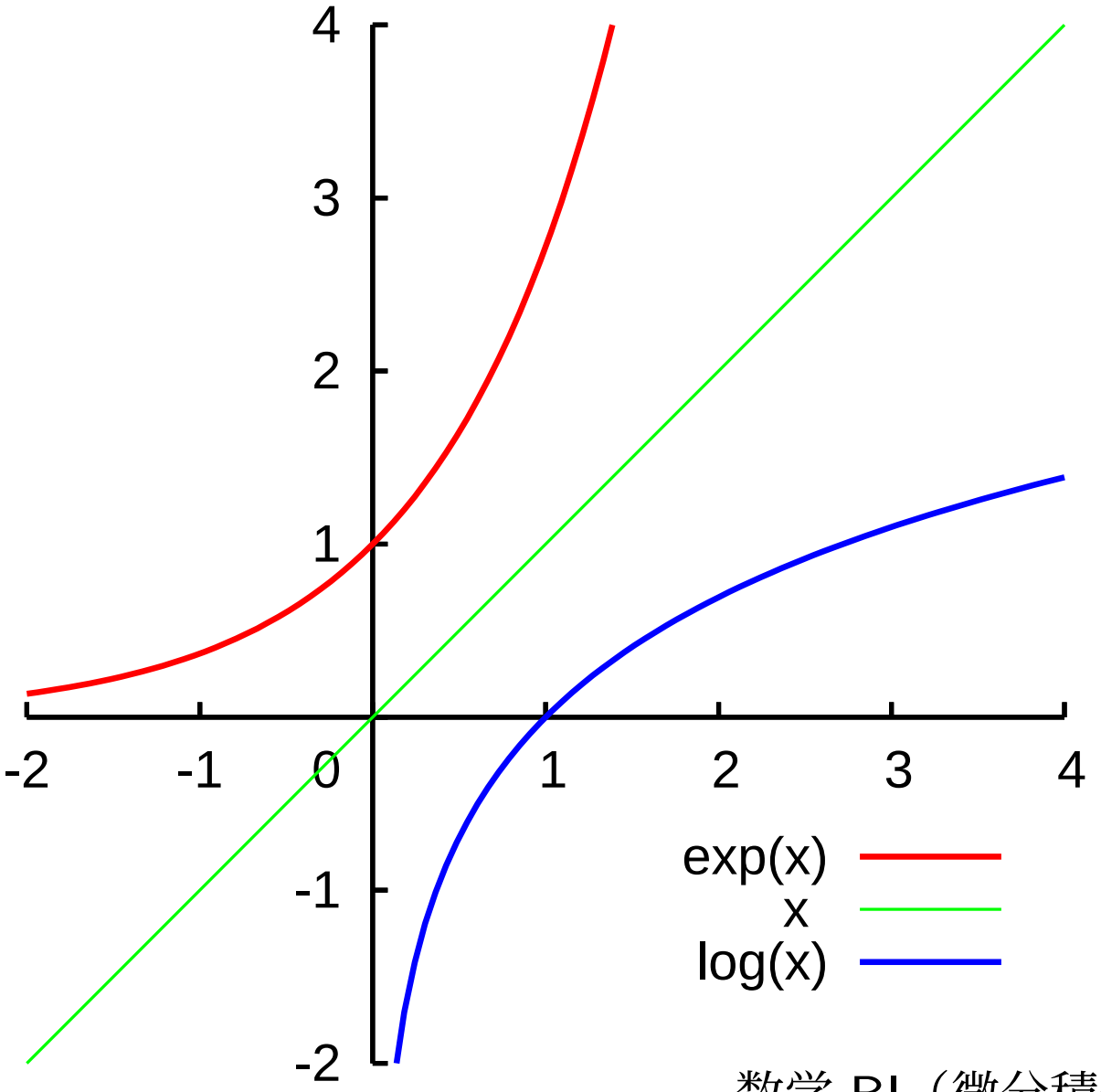
何処に辿り着くやら、お楽しみ

指数関数・対数関数は互いに逆関数

$$y = \exp x \Longleftrightarrow x = \log y$$

$$\log(\exp x) = x$$
$$\exp(\log x) = x$$

指数関数・対数関数は互いに逆関数



指数関数：

$y = \exp x$ **は微分方程式**

$$\frac{dy}{dx} = y$$

を満たす。

対数関数：

$y = \log x$ **は積分表示**

$$y = \int_{t=1}^{x} \frac{dt}{t}$$

を持つ。

$\longrightarrow$ **実はこれは表裏一体**

指数関数：

$y = \exp x$ **は微分方程式**

$$\frac{dy}{dx} = y$$

を満たす。

対数関数：

$y = \log x$ **は積分表示**

$$y = \int_{t=1}^{x} \frac{dt}{t}$$

を持つ。

$\longrightarrow$ **実はこれは表裏一体**

三角関数 $y = \sin x$ で同様に考えよう

$$\frac{dy}{dx} = \cos x$$

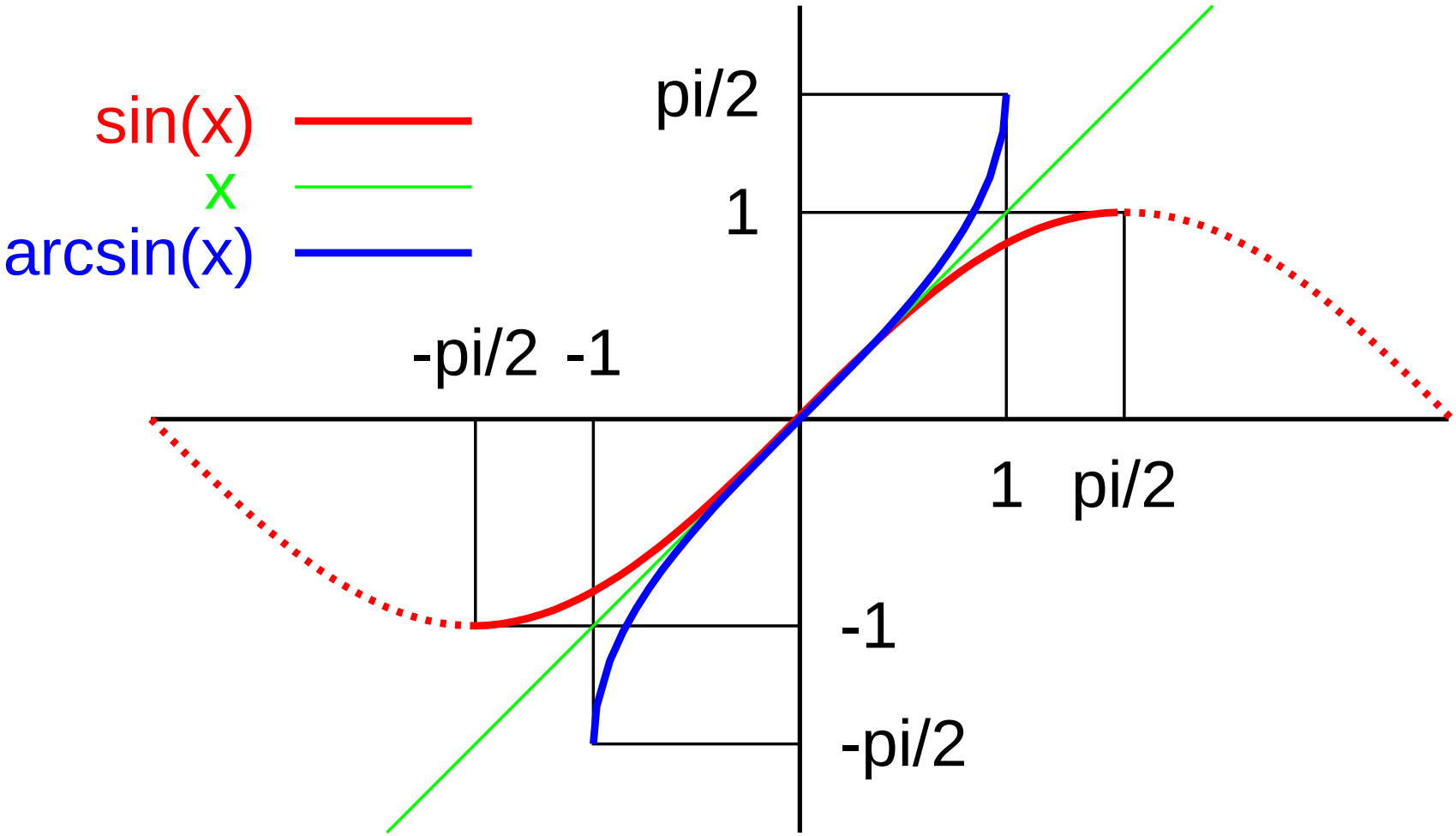
なので、次の微分方程式を満たす：

$$y^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1$$

従って、

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{1 - y^2}$$

$y = \sin x$ の逆関数 $y = \arcsin x$



$y = \arcsin x$ の積分表示

$$\frac{dx}{dy} = \sqrt{1 - x^2}$$

より

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

従って、

$$y = \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$y = \arcsin x$ の積分表示

通常 $y = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ と書いてしまうが、

変数を変えて正式に書けば、

$$\arcsin x = \int_{t=0}^{x} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

ということ。

$x = 0$ のとき $\arcsin 0 = 0$（即ち $\sin 0 = 0$）だから、

積分の下端は 0 で良い。

$y = \arcsin x$ の積分表示と Taylor 展開

$$\arcsin x = \int_{t=0}^{x} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

二項展開して項別積分すると、

$$\arcsin x = \int_{t=0}^{x} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-t^2)^n \, dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^{2n+1}$$

$y = \arcsin x$ の積分表示と Taylor 展開

$$\arcsin x = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-t^2)^n \, dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^{2n+1}$$

$$= x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \cdots$$

$$(|x| < 1)$$

$y = \sin x$ の逆関数 $y = \arcsin x$

- **定義域：** $-1 \leq x \leq 1$
- **値域：** $-\dfrac{\pi}{2} \leq y \leq \dfrac{\pi}{2}$ **（主値）**
- **積分表示：** $\arcsin x = \displaystyle\int_{t=0}^{x} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$
- $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

演習問題

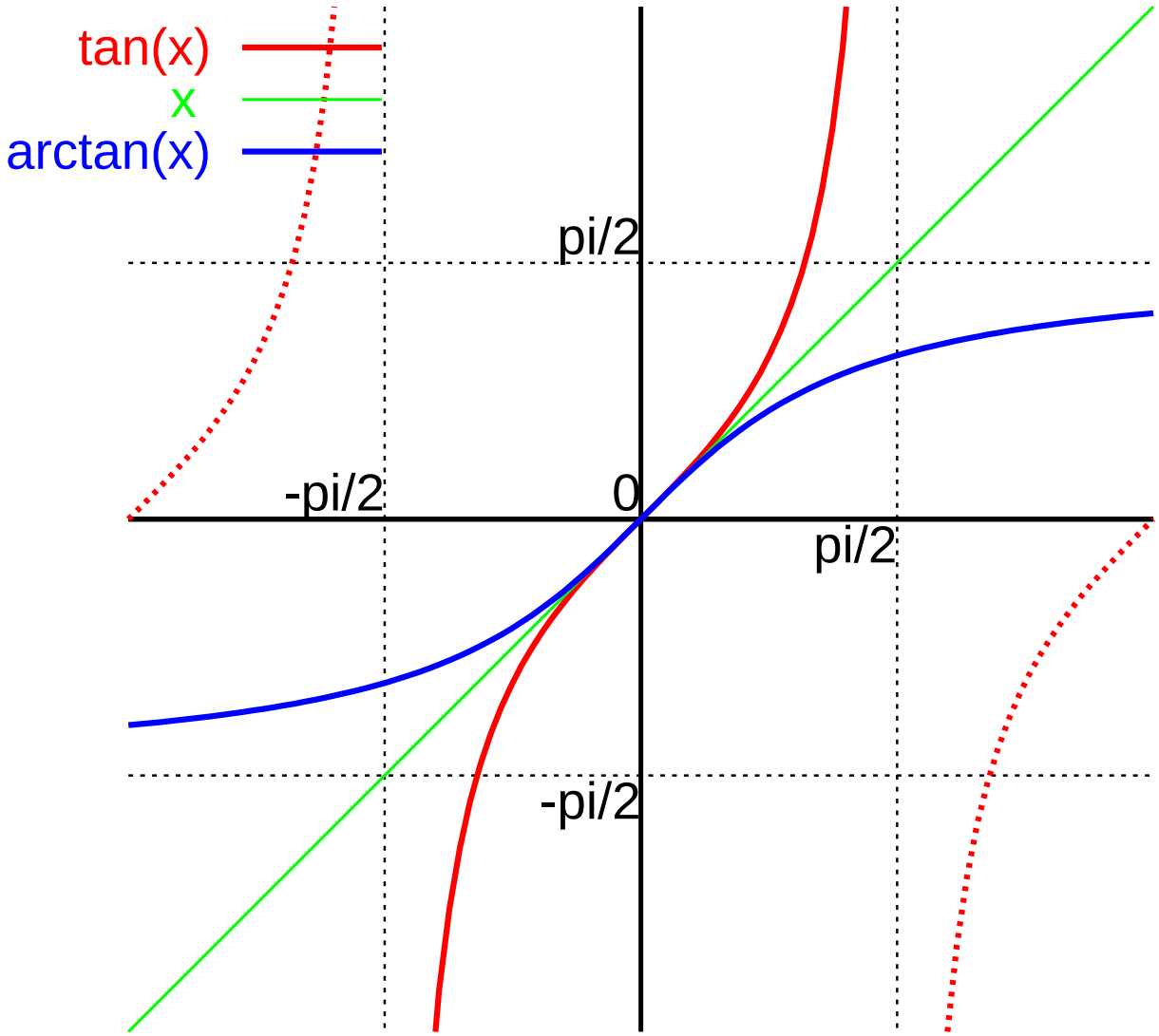
arcsin の時の真似をして、次の手順で
$y = \arctan x$ の Taylor 展開を求めよ

(1) $x = \tan y$ の満たす微分方程式を求める

(2) $\arctan x$ を積分で表す

(3) 被積分関数を Taylor 展開し項別積分する

$y = \tan x$ の逆関数 $y = \arctan x$



$y = \tan x$ の逆関数 $y = \arctan x$

- **定義域：全実数** x
- **値域：** $-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}$ **（主値）**
- **積分表示：** $\arctan x = \displaystyle\int_{t=0}^{x} \frac{dt}{1+t^2}$
- $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$