

中間試験は鋭意採点中

後半の主な内容は積分だが、

今日は 幕間 (**intermission**)

その前にちょっと補足

## d'Alembert の判定法 (比テスト)

$\frac{a_{n+1}}{a_n} \longrightarrow \exists r$  (収束) のとき、 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  は、

- $r < 1 \implies$  収束
- $r > 1 \implies$  発散

## Cauchy の判定法 (n 乗根テスト)

$\sqrt[n]{a_n} \longrightarrow \exists r$  (収束) のとき、 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  は、

- $r < 1 \implies$  収束
- $r > 1 \implies$  発散

で、 $r = 1$  の時は判定不能 (両方有り得る)

特に、単に

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \text{ または } \sqrt[n]{a_n} < 1$$

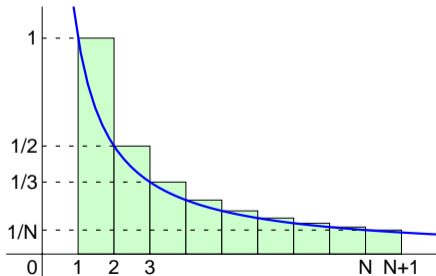
であっても、 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  が収束するとは限らない!!

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \exists r < 1 \text{ または } \sqrt[n]{a_n} < \exists r < 1$$

との違いに注意!!

## 例：調和級数

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} > \int_1^{N+1} \frac{dx}{x}$$
$$= \log(N+1) \rightarrow +\infty \quad (N \rightarrow \infty)$$



実際、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} : \text{発散} \quad \text{だが、} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} : \text{収束}$$

実は、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} : \begin{cases} s \leq 1 \implies \text{発散} \\ s > 1 \implies \text{収束} \end{cases}$$

→  $s > 1$  で  $s$  の関数を定めている

## Riemann のゼータ関数

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad : s > 1 \text{ で絶対収束}$$

(この範囲で  $s$  の関数を定めている)  
… **Riemann のゼータ関数**

“Millenium Prize” の 7 つの問題の 1 つ

「**Riemann 予想**」

は、この  $\zeta(s)$  の性質に関すること

→ 素数分布などに関連

## Riemann のゼータ関数の特殊値 (お話)

Euler (18 世紀):

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$$

$$\zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}$$

⋮

$$\zeta(2m) = (\text{有理数}) \times \pi^{2m}$$

$(m = 1, 2, 3, \dots)$

## Riemann のゼータ関数の特殊値（お話）

- $\zeta(3)$  : 有理数でない (Apéry, 1978)
- $\zeta(2m+1)$  達の中に無理数が無限個  
(Rivoal, 2000)
- $\zeta(5), \zeta(7), \dots, \zeta(21)$  の中の  
少なくとも 1 つは無理数  
(Rivoal, 2001)
- $\zeta(5), \zeta(7), \zeta(9), \zeta(11)$  の中の  
少なくとも 1 つは無理数  
(Zudilin, 2001)

→ これらの値（特殊値）の数論的性質は  
現在でも大きな研究テーマ



## Taylor 展開の問題点 (考えなくてはならないこと)

- 級数が収束するか？
- 収束したら元の関数と一致するか？
- 誤差の理論的評価は？
- 項別微積分 (極限操作の順序交換) を  
行なってよいか？

形式的 Taylor 展開が収束しても、

元の関数と一致しない例

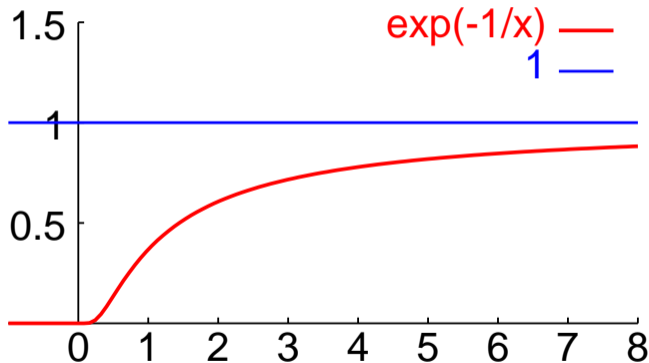
$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ e^{-\frac{1}{x}} & (x > 0) \end{cases}$$

実は、 $f^{(n)}(0) = 0$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ )

従って、形式的 Taylor 展開は 0

しかし勿論  $x > 0$  では  $f(x) \neq 0$

形式的 Taylor 展開が収束しても、  
元の関数と一致しない例



さてさて、幕間のお話

何処に辿り着くやら、お楽しみ

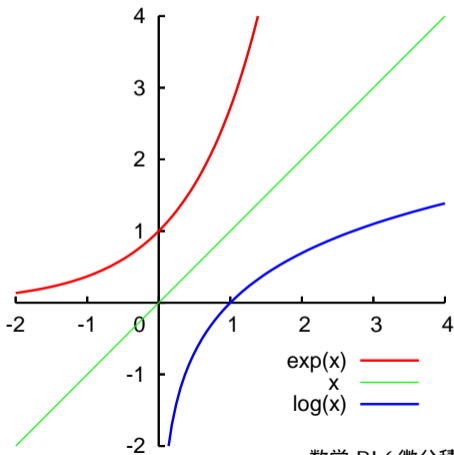
## 指数関数・対数関数は互いに逆関数

$$y = \exp x \iff x = \log y$$

$$\log(\exp x) = x$$

$$\exp(\log x) = x$$

## 指数関数・対数関数は互いに逆関数



指数関数：

$y = \exp x$  は微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = y$$

を満たす。

対数関数：

$y = \log x$  は積分表示

$$y = \int_{t=1}^x \frac{dt}{t}$$

を持つ。

→ 実はこれは表裏一体

三角関数  $y = \sin x$  で同様に考えよう

$$\frac{dy}{dx} = \cos x$$

なので、次の微分方程式を満たす：

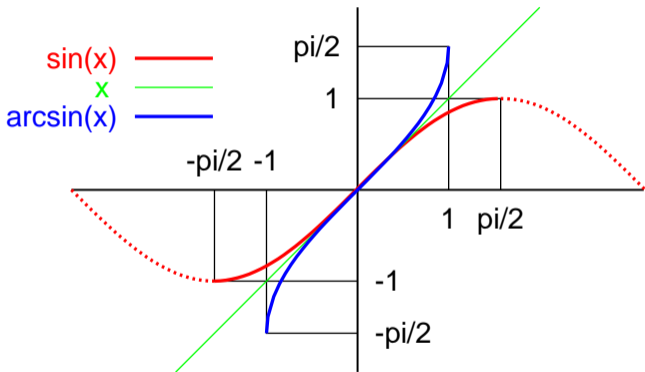
$$y^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1$$

従って、

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{1 - y^2}$$



$y = \sin x$  の逆関数  $y = \arcsin x$



## $y = \arcsin x$ の積分表示

$$\frac{dx}{dy} = \sqrt{1 - x^2}$$

より

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

従って、

$$y = \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

## $y = \arcsin x$ の積分表示

通常  $y = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$  と書いてしまうが、

変数を変えて正式に書けば、

$$\arcsin x = \int_{t=0}^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

ということ。

$x = 0$  のとき  $\arcsin 0 = 0$  (即ち  $\sin 0 = 0$ ) だから、

積分の下端は  $0$  で良い。

## $y = \arcsin x$ の積分表示と Taylor 展開

$$\arcsin x = \int_{t=0}^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

二項展開して項別積分すると、

$$\begin{aligned}\arcsin x &= \int_{t=0}^x \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-t^2)^n dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^{2n+1}\end{aligned}$$

## $y = \arcsin x$ の積分表示と Taylor 展開

$$\arcsin x = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-t^2)^n dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^{2n+1}$$

$$= x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \dots$$

$(|x| < 1)$

$y = \sin x$  の逆関数  $y = \arcsin x$

- 定義域： $-1 \leq x \leq 1$
- 値域： $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$  (主値)
- 積分表示： $\arcsin x = \int_{t=0}^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$
- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

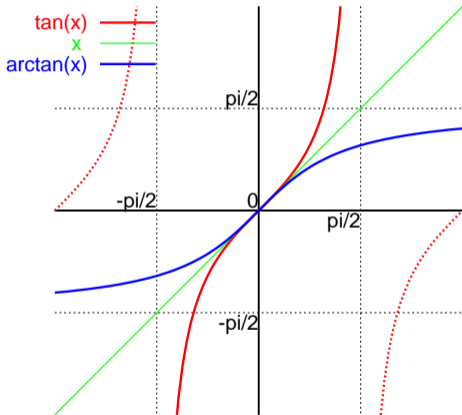
## 演習問題

$\arcsin$  の時の真似をして、次の手順で

$y = \arctan x$  の **Taylor** 展開を求めよ

- (1)  $x = \tan y$  の満たす微分方程式を求める
- (2)  $\arctan x$  を積分で表す
- (3) 被積分関数を **Taylor** 展開し項別積分する

$y = \tan x$  の逆関数  $y = \arctan x$





$y = \tan x$  の逆関数  $y = \arctan x$

- 定義域：全実数  $x$
- 値域： $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$  (主値)
- 積分表示： $\arctan x = \int_{t=0}^x \frac{dt}{1+t^2}$
- $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$