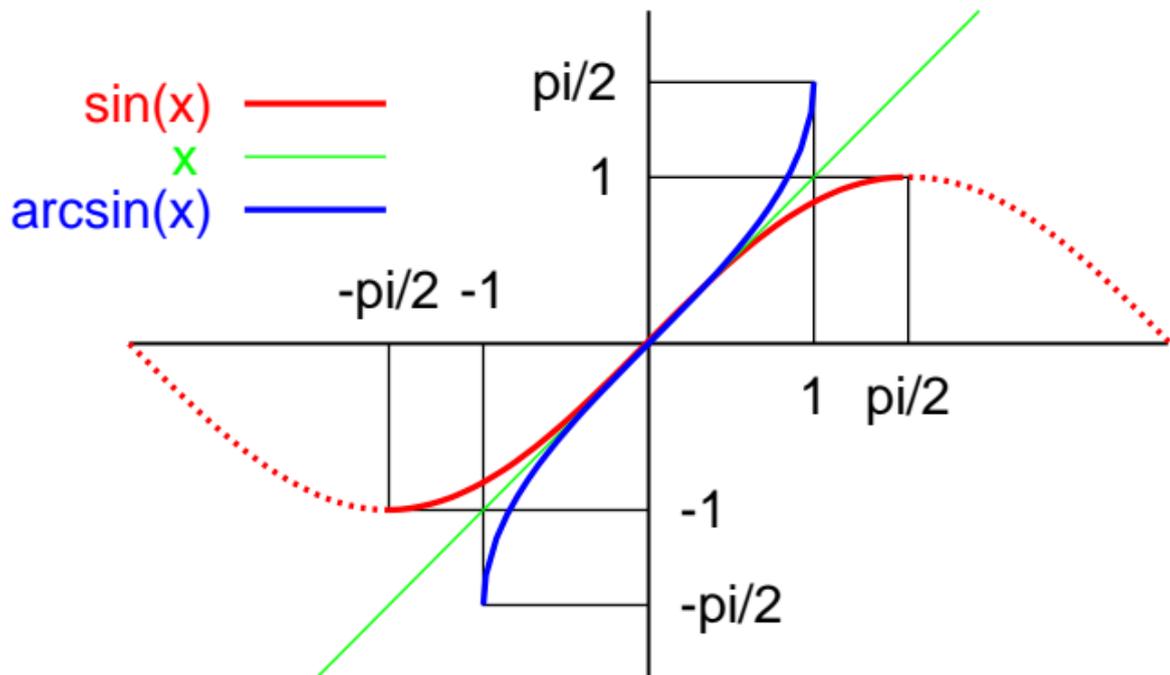


$y = \sin x$ の逆関数 $y = \arcsin x$



$y = \sin x$ の逆関数 $y = \arcsin x$

- 定義域： $-1 \leq x \leq 1$
- 値域： $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ (主値)
- 積分表示： $\arcsin x = \int_{t=0}^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$
- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$y = \arcsin x$ の積分表示と Taylor 展開

$$\arcsin x = \int_{t=0}^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

二項展開して項別積分すると、

$$\begin{aligned}\arcsin x &= \int_{t=0}^x \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-t^2)^n dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^{2n+1}\end{aligned}$$

$y = \arcsin x$ の積分表示と Taylor 展開

$$\arcsin x = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-t^2)^n dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^{2n+1}$$

$$= x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \dots$$

$(|x| < 1)$

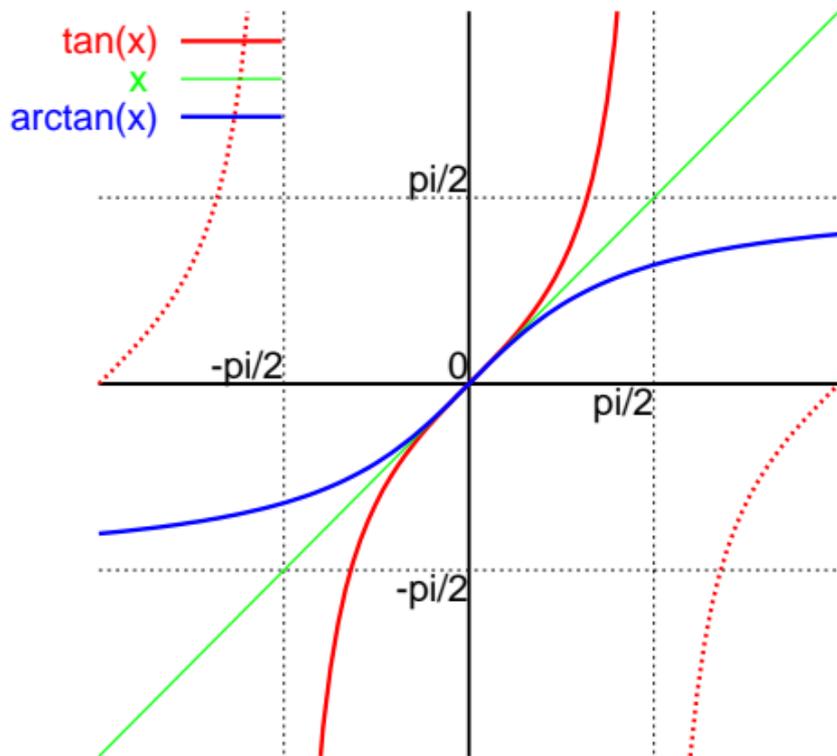
演習問題

\arcsin の時の真似をして、次の手順で

$y = \arctan x$ の **Taylor** 展開を求めよ

- (1) $x = \tan y$ の満たす微分方程式を求める
- (2) $\arctan x$ を積分で表す
- (3) 被積分関数を **Taylor** 展開し項別積分する

$y = \tan x$ の逆関数 $y = \arctan x$



$y = \tan x$ の逆関数 $y = \arctan x$

- 定義域：全実数 x
- 値域： $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ (主値)
- 積分表示： $\arctan x = \int_{t=0}^x \frac{dt}{1+t^2}$
- $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

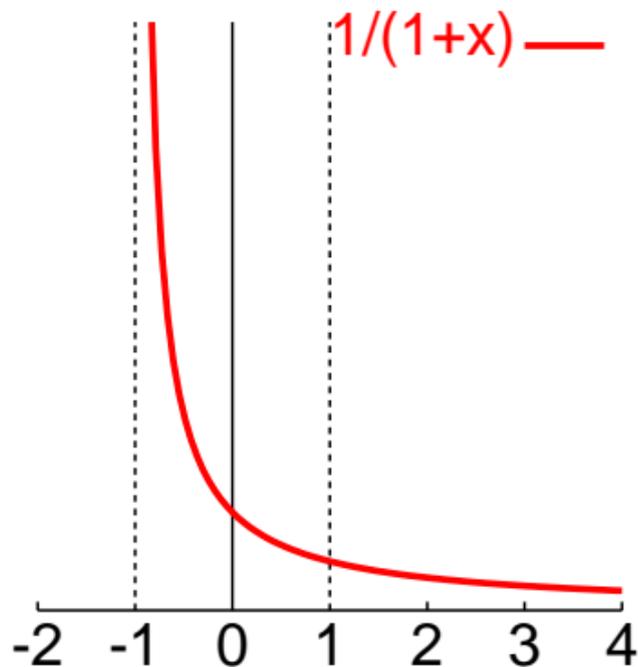
ところで、 $\arcsin x$, $\arctan x$ とも、
Taylor 展開の収束半径は 1 であった。

$\arcsin x$ は元々定義域が $|x| \leq 1$ なので、
別に不思議はないが、

$\arctan x$ は全実数に対して定義できて、
一見 $|x| < 1$ に限る理由がないし、

被積分関数 $\frac{1}{1+t^2}$ にも別に変な所はない。

例： $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$



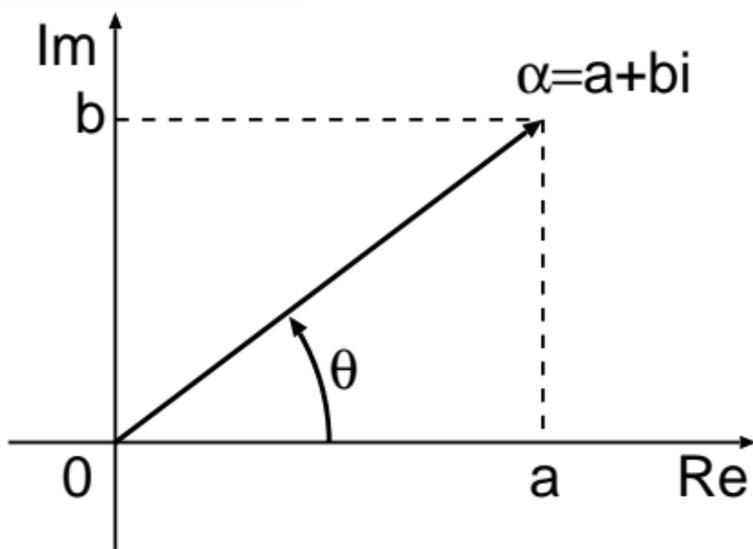
$x = -1$ で分母が 0 \rightarrow 元々そこまで

実は、複素数まで拡げて考えると、
 $\arctan x$ の正体が顕れる !!

被積分関数 $\frac{1}{1+t^2}$ は $t = \pm i$ で分母が 0 !!

やはり $|x| = 1$ の所に越えられぬ障害があった
($|\pm i| = 1$)

複素数の絶対値・偏角



- $|\alpha| = \sqrt{\alpha\bar{\alpha}} = \sqrt{a^2 + b^2}$
: α の絶対値 (absolute value)
- $\arg \alpha = \theta$: α の偏角 (argument)
- $\alpha = |\alpha|(\cos \theta + i \sin \theta)$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

で、 x を複素数にすると、

e^x の方は当面は意味不明だが、

右辺の級数は四則演算と極限操作とだけなので

意味を持つ

x が複素数の場合も、

e^x を右辺の級数で定義してしまおう !!

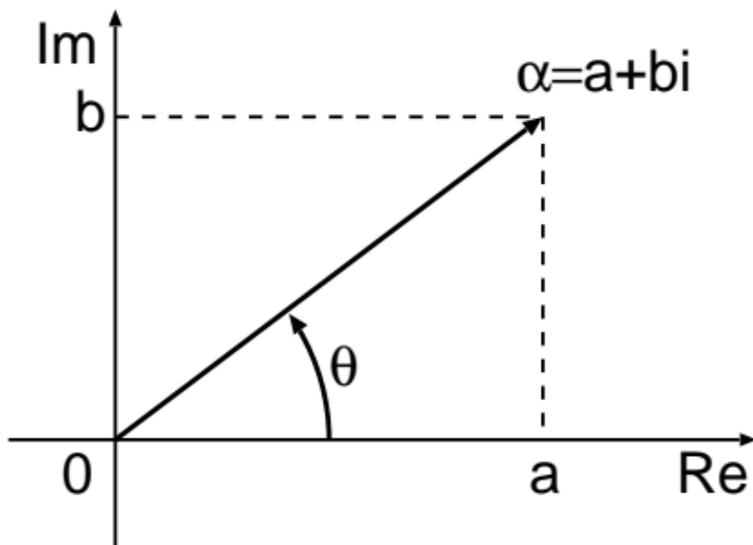
(→ 詳しくは「複素関数論」で)

試しに、

$$\begin{aligned}e^{ix} &= 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \dots \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots\right) \\ &\quad + i \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots\right) \\ &= \cos x + i \sin x\end{aligned}$$

Euler の公式 : $e^{ix} = \cos x + i \sin x$

複素数の極座標表示



$$\begin{cases} r := |\alpha| \\ \theta := \arg \alpha \end{cases} \quad \text{とおくと、} \quad \alpha = re^{i\theta}$$

: α の極座標表示

三角関数を指数関数で表す

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

↓

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$\tan x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{i(e^{ix} + e^{-ix})}$$

三角関数を指数関数で表す

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$\tan x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{i(e^{ix} + e^{-ix})}$$

これを使うと、

三角関数の諸性質は指数関数の性質に帰着 !!

加法定理 ← 指数法則

双曲線関数

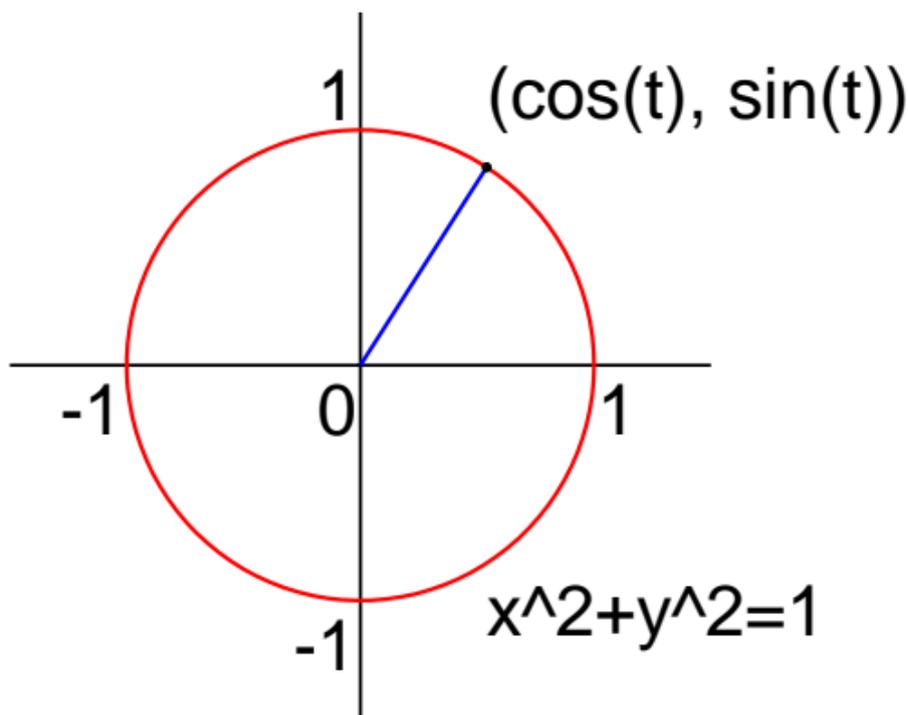
$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

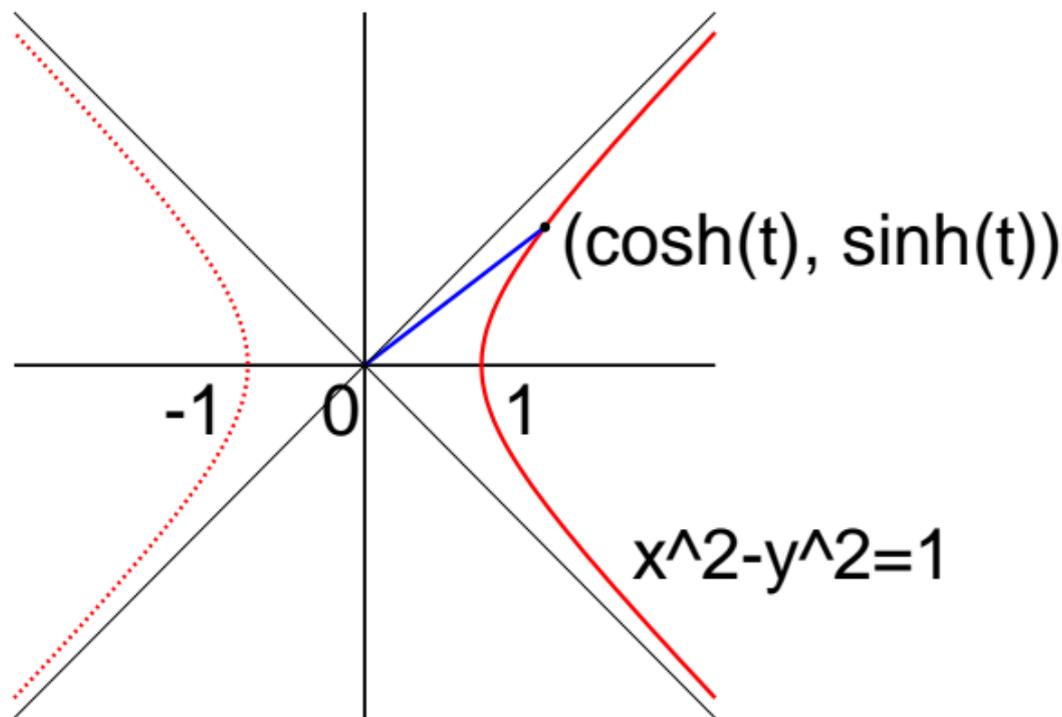
$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

- 三角関数と類似の性質を持つ
- 自然現象の記述にも現れる

$x^2 + y^2 = 1$ の媒介変数表示 $(\cos t, \sin t)$



$x^2 - y^2 = 1$ の媒介変数表示 ($\cosh t, \sinh t$)



さて、話は変わって、

本講義後半の主題は、

積分

である

高校で習った積分

- 逆微分としての「原始関数」
 $f(x) = F'(x)$ となる F を求める
- 原始関数の区間両端での値の差としての
「定積分」 $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$
- 定積分は実は「面積」を表す

積分・微分の発見

歴史的には、実は順番が逆で、
積分の起源の方が微分よりも遥かに早い

- 「積分」：面積を求める手法の探求
(エジプト・ギリシャ：2000年以上前)
- 「微分」：物体の運動の数学的探求
(Newton, Leibniz：17世紀)

それぞれ別のものとして発見されたものが
実は密接に関連していた !!
... 「**微分積分学の基本定理**」

積分法

- 統一的な求積法としての「定積分」
- 積分の上端を動かして、
積分値を上端の関数とみる

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt : \text{「定積分関数」}$$

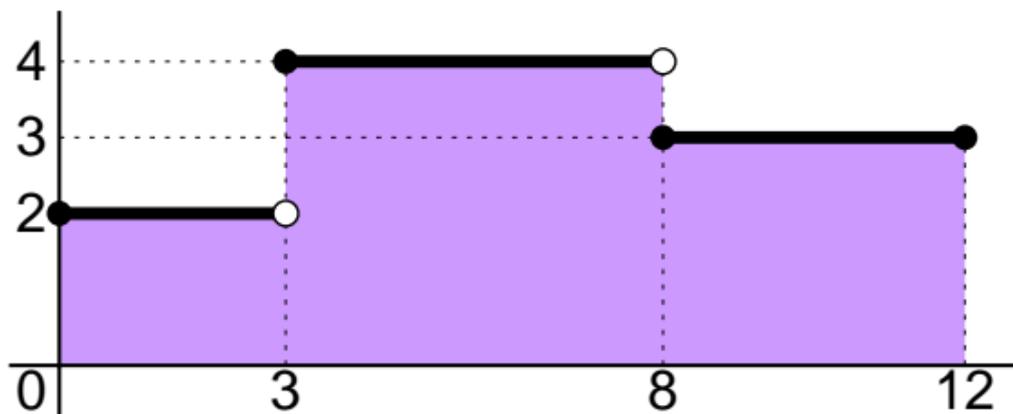
- 実は定積分関数を微分すると元の関数

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$$

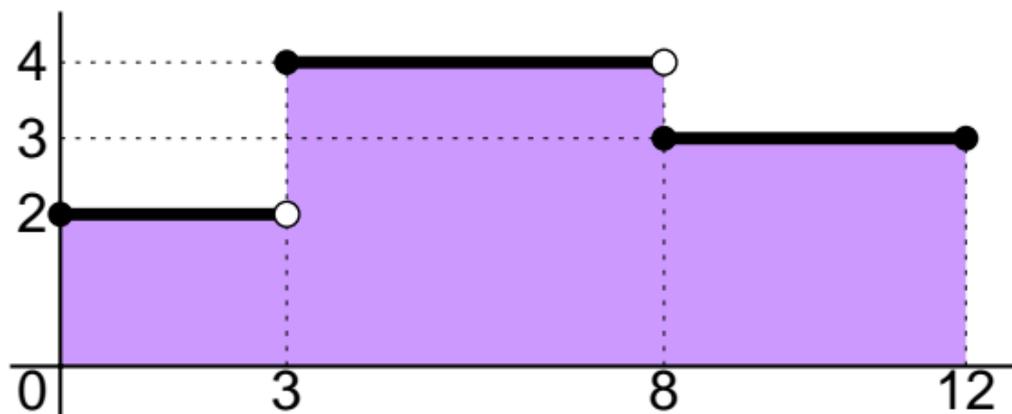
「微分積分学の基本定理」

積分の定式化

$$I = \int_0^{12} f(x) dx, \quad f(x) = \begin{cases} 2 & (0 \leq x < 3) \\ 4 & (3 \leq x < 8) \\ 3 & (8 \leq x \leq 12) \end{cases}$$



積分の定式化



$$I = \int_0^{12} f(x) dx$$

$$= 2 \times (3 - 0) + 4 \times (8 - 3) + 3 \times (12 - 8).$$

「積分」は「積和」である

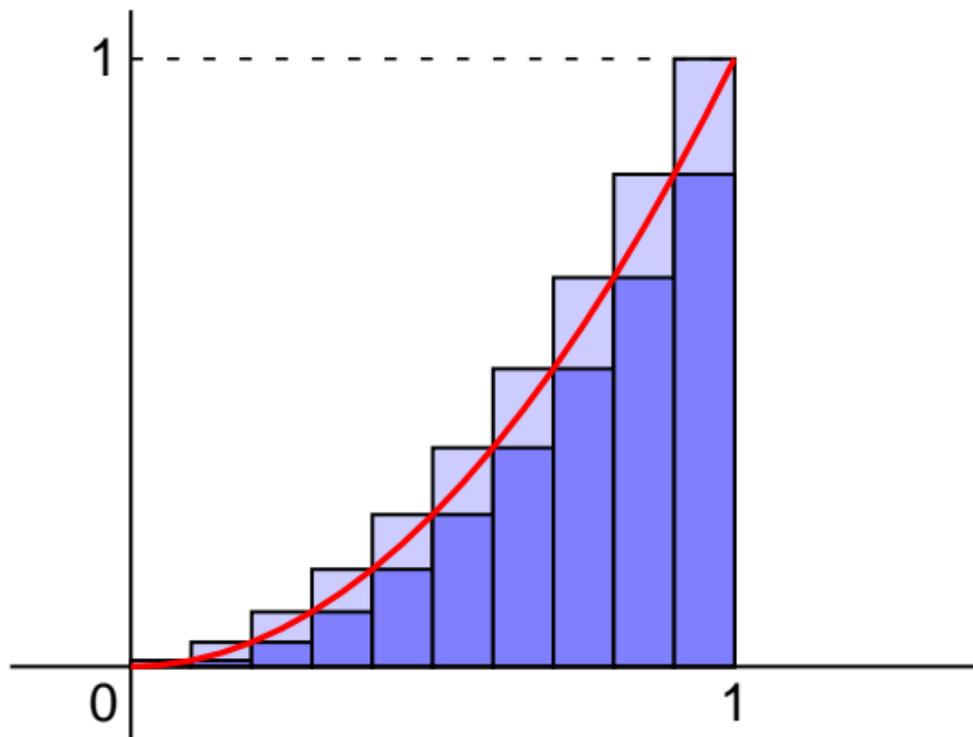
積分の定式化

では、

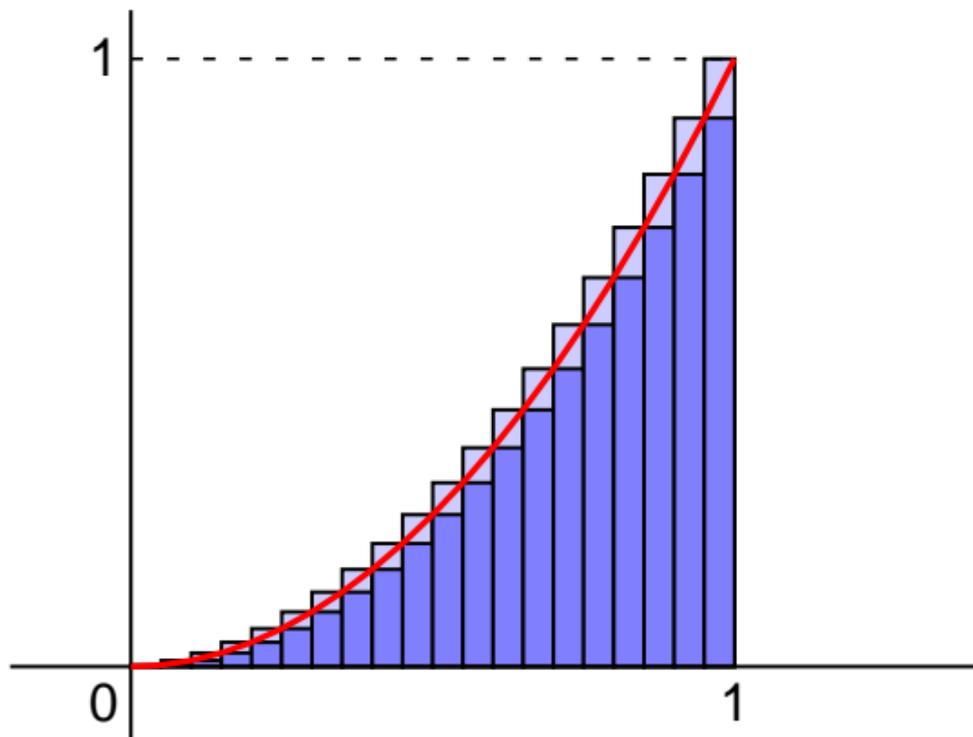
$$I = \int_0^1 f(x) dx, \quad f(x) = x^2$$

はどう考えるか？

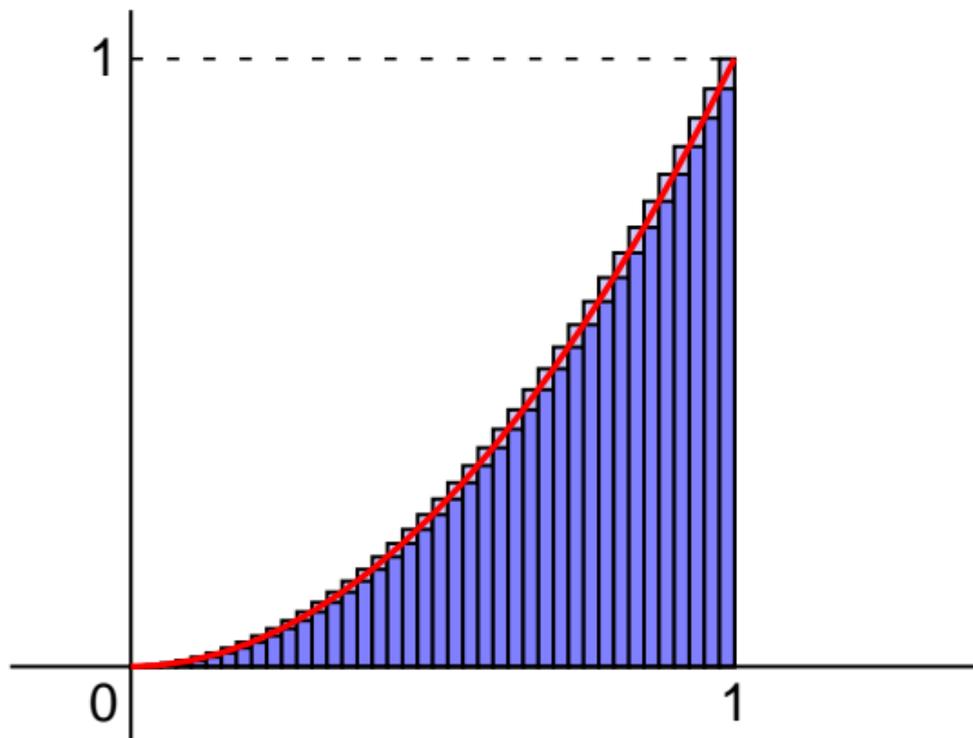
$$I = \int_0^1 f(x) dx, \quad f(x) = x^2$$



$$I = \int_0^1 f(x) dx, \quad f(x) = x^2$$



$$I = \int_0^1 f(x) dx, \quad f(x) = x^2$$



演習問題

$f(x) = x^2$ の $[0, a]$ での定積分

$$I = \int_0^a f(x) dx$$

を計算したい。

分割 $\Delta_n : 0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = a$ を
 n 等分な分割 (即ち $x_i = \frac{ia}{n}$) とする。

(1) 各小区間 $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ での
 $f(x)$ の下限 m_i および上限 M_i は?

$$(2) \quad s_{\Delta_n} = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}) \quad \text{及び}$$

$$S_{\Delta_n} = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}) \quad \text{を計算せよ。}$$

(3) 任意の n に対して $s_{\Delta_n} \leq I \leq S_{\Delta_n}$ であることから、 $I = \int_0^a f(x) dx$ を求めよ。

($\lim_{n \rightarrow \infty} s_{\Delta_n}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{\Delta_n}$ が、それぞれ存在して等しくなることを確かめよ。)

上限・下限について（再掲）

例：半開区間 $I = [0, 1) = \{x \mid 0 \leq x < 1\}$

I に最大値はないが、
どう見ても 1 が “最大値みたいな値” である



上限・下限について（再掲）

1 は最小の上界：

- 1 が上界である： $\forall x \in I : x \leq 1$
- 1 より少しでも小さくしたら上界でない：

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists x \in I : x > 1 - \varepsilon$$

“どんな（小さな）正の数 ε についても
或る（うまい/まずい） $x \in I$ があって
 x が $1 - \varepsilon$ を超える”

このことを、

1 が I の**上限 (supremum)** である

と言い、 $\sup I = 1$ と書く

上限・下限について（再掲）

一般に、
実数全体の集合 \mathbb{R} の部分集合 $S \subset \mathbb{R}$ に対し、
実数 $a \in \mathbb{R}$ が次を満たす

（即ち、 a が S の最小の上界である）とき、
 a が S の**上限**であるといい、 $a = \sup S$ と書く：

- $\forall x \in S : x \leq a$
（即ち、 a が S の上界（の一つ）である）
- $\forall \varepsilon > 0 : \exists x \in S : x > a - \varepsilon$
（即ち、 a より少しでも小さくしたら
 S の上界でない）