

積分法

- 統一的な求積法としての「定積分」
- 積分の上端を動かして、
積分値を上端の関数とみる

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt : \text{「定積分関数」}$$

- 実は定積分関数を微分すると元の関数

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$$

「微分積分学の基本定理」

積分の定義

仮定：

- 積分区間 $I = [a, b]$: 有界閉区間
- 被積分関数 $f : I$ で 有界
即ち、

$$\exists m, M : \forall x \in I : m \leq f(x) \leq M$$

「積分」の定義の方針

- 区間を分割せよ
- 各区間で上下から見積もれ
- それを足し上げよ
- 以上を全ての分割について考えよ
- 上下からの見積が一致するか？

積分の定義

$\Delta : a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$: 区間の分割

$I_i := [x_{i-1}, x_i]$: 各小区間 ($i = 1, \dots, n$)

$\delta(\Delta) := \max_i (x_i - x_{i-1})$: 分割の最大幅

$m_i := \inf_{x \in I_i} f(x) = \inf \{f(x) \mid x \in I_i\}$

$M_i := \sup_{x \in I_i} f(x) = \sup \{f(x) \mid x \in I_i\}$

: 区間 I_i に於ける f の下限・上限

積分の定義

$$s_{\Delta} := \sum_{i=1}^n m_i (x_i - x_{i-1})$$

$$S_{\Delta} := \sum_{i=1}^n M_i (x_i - x_{i-1})$$

: 分割 Δ に関する上下からの見積もり

→

$$s_{\Delta} \leq \text{“面積”} \leq S_{\Delta}$$

分割 Δ を色々考えて、見積もりを精密にせよ。

積分の定義

全ての分割 Δ を考えて、

下からの見積もりをどこまで上げられるか

$$\longrightarrow s := \sup_{\Delta} s_{\Delta} : \text{下積分}$$

上からの見積もりをどこまで下げられるか

$$\longrightarrow S := \inf_{\Delta} S_{\Delta} : \text{上積分}$$

$$s \leq \text{“面積”} \leq S$$

一般に $s \leq S$ であるが、 $s = S$ とは限らない !!

積分の定義

$s = S$ のとき、これが “面積” と呼ぶべき唯一の値
この時、

f は I で積分可能 (**integrable**)

と言い、

この値を

$$\int_a^b f(x) dx \quad \left(\text{または} \int_I f(x) dx \right)$$

と書いて、

f の I に於ける**定積分** (**definite integral**)

と呼ぶ

定理 (連続関数の積分可能性):

f : 閉区間 $I = [a, b]$ で連続
(このとき自動的に有界)



f : I に於いて積分可能

$s(x, y)$: 区間 $[x, y]$ に於ける下積分

特に、 $s(x) := s(a, x)$ と書くとき

主張 :

$s(x) : [a, b]$ で微分可能で、
 $s'(x) = f(x)$

即ち、

$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall h :$

$$0 < |h| < \delta \implies \left| \frac{s(x+h) - s(x)}{h} - f(x) \right| < \varepsilon$$

$s(x, y)$: 区間 $[x, y]$ に於ける下積分

特に、 $s(x) := s(a, x)$ と書くとき

主張 :

$s(x) : [a, b]$ で微分可能で、
 $s'(x) = f(x)$

即ち、

$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall h :$

$$0 < |h| < \delta \implies \left| \frac{s(x+h) - s(x)}{h} - f(x) \right| < \varepsilon$$

定理 :

f : 閉区間 $I = [a, b]$ で連続
(このとき自動的に有界)



f : I に於いて積分可能

更に、今の証明を振り返ると、

$$S(a, x) = s(a, x) = \int_a^x f(t) dt$$

(上端 x の関数で、定積分関数と呼ぶ)
が f の原始関数になっていることが判る

定理 :

f : 閉区間 $I = [a, b]$ で連続
(このとき自動的に有界)



f : I に於いて積分可能

更に、今の証明を振り返ると、

$$S(a, x) = s(a, x) = \int_a^x f(t) dt$$

(上端 x の関数で、定積分関数と呼ぶ)
が f の原始関数になっていることが判る

微分積分学の基本定理

f : 閉区間 $I = [a, b]$ で連続のとき

- $\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$

即ち、 $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ とおくと、

F は f の原始関数 (の一つ)

- F を f の原始関数 (の一つ) とすると、

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$$

尚、下端 a を取り替えても、

定積分関数は定数の差しかない：

$$\int_a^x f(t) dt - \int_{a'}^x f(t) dt = \int_a^{a'} f(t) dt$$

その差を気にしない（下端を指定しない）とき、

単に

$$\int f(x) dx$$

と書き、

f の不定積分 (**indefinite integral**) と呼ぶ

一方、原始関数も、
定数だけ違ってもやはり原始関数
(微分したら同じ)なので、
普通は定数の差を気にしない

微分積分学の基本定理

f : 連続のとき、不定積分 \equiv 原始関数

- 原始関数 (逆微分) を知れば積分が計算できる
- 計算は今までに馴染みの
諸公式・手法によれば良い

一方、原始関数も、
定数だけ違ってもやはり原始関数
(微分したら同じ)なので、
普通は定数の差を気にしない

微分積分学の基本定理

f : 連続のとき、不定積分 \equiv 原始関数

→ 原始関数 (逆微分) を知れば積分が計算できる

→ 計算は今までに馴染みの
諸公式・手法によれば良い

一方、原始関数も、
定数だけ違ってもやはり原始関数
(微分したら同じ)なので、
普通は定数の差を気にしない

微分積分学の基本定理

f : 連続のとき、不定積分 \equiv 原始関数

- 原始関数 (逆微分) を知れば積分が計算できる
- 計算は今までに馴染みの
諸公式・手法によれば良い

ところで、前に見た $\arcsin x = \int_{t=0}^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ で、

$x = 1$ とすれば $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$ だから、

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}$$

となりそうだが、

区間端点 1 では被積分関数が定義されない!!

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \rightarrow +\infty \quad (x \rightarrow 1-0)$$

ところで、前に見た $\arcsin x = \int_{t=0}^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ で、

$x = 1$ とすれば $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$ だから、

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}$$

となりそうだが、

区間端点 1 では被積分関数が定義され**ない**!!

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \rightarrow +\infty \quad (x \rightarrow 1-0)$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}$$

と考えたいが、

- 積分区間が半開区間 $I = [0, 1) = \{x \mid 0 \leq x < 1\}$
- しかもそこで被積分関数 $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ が非有界

このような場合に対しても

積分の定義を拡張しておこう

→ 広義積分・変格積分 (improper integral)

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}$$

と考えたいが、

- 積分区間が半開区間 $I = [0, 1) = \{x \mid 0 \leq x < 1\}$
- しかもそこで被積分関数 $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ が非有界

このような場合に対しても

積分の定義を拡張しておこう

→ 広義積分・変格積分 (**improper integral**)

広義積分・変格積分 (improper integral)

- 区間が有界で、端点で関数が非有界

例：
$$\int_0^1 \frac{dx}{x}$$

- 区間が非有界（無限区間）

例：
$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$$

→ 共に、収束・発散の判定が重要

区間が有界で、端点で関数が非有界の場合

$f : [a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}$ で定義され、
 $x = b$ の近くで非有界だが、
任意の (どんな小さい) $\varepsilon > 0$ に対しても、
 $[a, b - \varepsilon] = \{x \mid a \leq x \leq b - \varepsilon\}$ で
有界かつ積分可能

とすると、各 $\varepsilon > 0$ に対し、

$$\int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$$

が定義される

区間が有界で、端点で関数が非有界の場合

この状況で、

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$$

が存在するとき、

f は $[a, b)$ で **広義積分可能** と言い、

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$$

と書く (広義積分が収束する とも言う)

区間が非有界（無限区間）な場合

$f : [a, +\infty) = \{x \mid a \leq x\}$ で定義され、
任意の（どんな大きい） $M > a$ に対しても、
 $[a, M] = \{x \mid a \leq x \leq M\}$ で
有界かつ積分可能

とすると、

$$\int_a^M f(x) dx$$

が定義される

区間が非有界（無限区間）な場合

この状況で、

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \int_a^M f(x) dx$$

が存在するとき、

f は $[a, +\infty)$ で**広義積分可能**と言い、

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx := \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_a^M f(x) dx$$

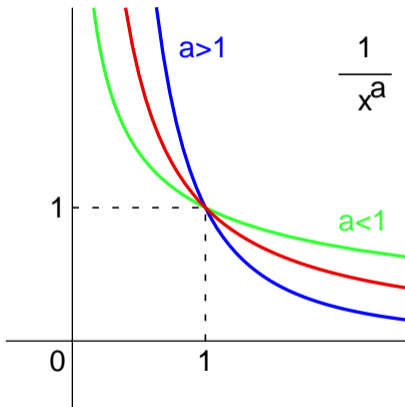
と書く（広義積分が収束するとも言う）

広義積分の収束判定 (の例)

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx : \begin{cases} \alpha > 1 \implies \text{収束} \\ \alpha \leq 1 \implies \text{発散} \end{cases}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx : \begin{cases} \alpha < 1 \implies \text{収束} \\ \alpha \geq 1 \implies \text{発散} \end{cases}$$

広義積分の収束判定 (の例)



$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$$

$\alpha > 1 \implies$ 収束

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$$

$\alpha < 1 \implies$ 収束

広義積分の収束判定 (の例)

$$\bullet \exists \varepsilon > 0, \exists C > 0 : |f(x)| < \frac{C}{x^{1+\varepsilon}}$$
$$\implies \int_1^{+\infty} f(x) dx : \text{収束}$$

$$\bullet \exists \varepsilon > 0, \exists C > 0 : |f(x)| < \frac{C}{x^{1-\varepsilon}}$$
$$\implies \int_0^1 f(x) dx : \text{収束}$$

注意： $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x}$ は収束するとは言わ**ない**

→ $[-1, 0)$ と $(0, 1]$ とに分けて 別々に 考える：

$$\int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x} = -\log \varepsilon \longrightarrow +\infty \quad (\varepsilon \rightarrow +0)$$

$$\int_{-1}^{-\varepsilon'} \frac{dx}{x} = \log \varepsilon' \longrightarrow -\infty \quad (\varepsilon' \rightarrow +0)$$

なので、 $\int_0^1 \frac{dx}{x}$, $\int_{-1}^0 \frac{dx}{x}$ はどちらも収束しない

広義積分で定義される関数の例

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^s \frac{dx}{x} \quad : \Gamma \text{ 関数}$$

(ガンマ関数)

- 広義積分は $s > 0$ で収束
- $\Gamma(1) = 1$
- $\Gamma(s + 1) = s\Gamma(s)$
- $\Gamma(n + 1) = n!$
- $\Gamma(s)\Gamma(1 - s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}$

広義積分で定義される関数の例

$$B(s, t) = \int_0^1 x^s (1-x)^t \frac{dx}{x(1-x)} \quad : \text{B 関数}$$

(ベータ関数)

- 広義積分は $s > 0, t > 0$ で収束

- $B(s, t) = \frac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)}$