授業アンケート実施「教員独自の設問」

(1) 入学前、数学は好きでしたか
（5：好き ⟵ 中間 ⟶ 嫌い：1）

(2) 今は数学は好きですか
（5：好き ⟵ 中間 ⟶ 嫌い：1）

(3) 理工学部共通の
１年配当の必修科目として
適切な内容だったと思いますか
（5：難し過ぎ ⟵ 適切 ⟶ 易し過ぎ：1）

期末試験のお知らせ

7月25日（月） 13:30 ～ 15:00

4-175教室・4-195教室

（2教室に分かれて実施・ここじゃ**ない**）

（部屋割りはLoyolaで確認のこと）

- 積分を巡る諸々
  （今回(7/11)の講義内容まで）
- 中間試験前の内容も一部関連
- 学生証必携
- 「積分公式集」は配布する

宣伝：秋期の数学関係の授業

- 理工共通科目 II 群（選択・選択必修科目）
  - ⋆ 「数学 AII（線型空間論）」
  - ⋆ 「数学 BII（多変数微積）」
  - ⋆ 「微分方程式の基礎」
  - ⋆ 「数学演習 II」
- 全学共通科目（選択科目）
  - ⋆ 「現代数学 B」

広義積分で定義される関数の例

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^s \frac{dx}{x}$$

：Γ 関数

（ガンマ関数）

- **広義積分は $s > 0$ で収束**
- $\Gamma(1) = 1$
- $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$
- $\Gamma(n+1) = n!$
- $\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \dfrac{\pi}{\sin \pi s}$

広義積分で定義される関数の例

$$B(s,t) = \int_0^1 x^s(1-x)^t \frac{dx}{x(1-x)}$$

：B 関数

（ベータ関数）

- 広義積分は $s > 0, t > 0$ で収束
- $B(s,t) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2s-1}\theta \cos^{2t-1}\theta \; d\theta$
- $B(s,t) = \dfrac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)}$

積分の計算法

微分積分学の基本定理：

f：連続のとき、　　不定積分 $\equiv$ 原始関数

$\longrightarrow$ 原始関数（逆微分）を知れば積分が計算できる

$\longrightarrow$ 計算は今までに馴染みの
諸公式・手法によれば良い

積分の計算法

しかし、（微分と違って）

良く知っている関数でも

不定積分（原始関数）が
（原理的に）計算できないものもある

「積の積分」「合成関数の積分」
の公式が存在しない !!

積分の計算法

しかし、（微分と違って）

良く知っている関数でも

不定積分（原始関数）が
（原理的に）計算できないものもある

「積の積分」「合成関数の積分」
の公式が存在しない!!

例：不定積分 $\displaystyle\int \frac{e^x}{x}\,dx$ は、

- 有理関数・三角関数・指数関数
  および、それらの逆関数の

- 有限回の合成で作れる関数

（初等関数という）の範囲に収まらないことが
証明されている

要は、

出来るものしか出来ない

ので、個別のテクニックを追っても切りがない。

そこで、個別の例は
公式集などを参照すれば良いことにして、

ここでは、
“原理的に計算できる例”
を幾つか紹介する

“原理的に計算できる” 不定積分の例

- **有理関数**
- $\sqrt[n]{1\,\text{次式}}$ 1 **種類**
- $\sqrt{2\,\text{次式}}$ 1 **種類**
- $\sqrt{1\,\text{次式}}$ 2 **種類**
- **三角関数の有理関数**

有理関数の不定積分の基本形

- $\displaystyle\int \frac{1}{x-a}\,dx = \log|x-a|$
- $\displaystyle\int \frac{1}{(x-a)^n}\,dx = \frac{1}{(1-n)(x-a)^{n-1}}$
- $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \arctan x$
- $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \log(x^2+1)$
- $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+1)^n}\,dx$ **は難しいが、出来る**
  （部分積分して n についての漸化式を作る）

部分分数分解

多項式 $f(X), g(X)$ **が互いに素（共通因数なし）のとき**

$$\frac{\text{多項式}}{f(X)g(X)} = \frac{\text{多項式}}{f(X)} + \frac{\text{多項式}}{g(X)}$$

の形に書ける

部分分数分解

実数係数多項式 $f(X) \in \mathbb{R}[X]$ **は、**

実数係数の範囲で、

$$f(X) = f_1(X)^{n_1} \cdot \cdots \cdot f_k(X)^{n_k}$$

（各 f_i **は** $\underline{1 \text{ 次式}}$ **または** **実根なしの 2 次式）**

と因数分解される

$\longrightarrow$ **有理関数の積分はさっきの基本形に帰着**

例：有理関数

$$f(x) = \frac{2x^3 + 4x^2 - 7x - 15}{x^2(x^2 + 4x + 5)}$$

の不定積分の計算

(1) $f(x) = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x^2} + \dfrac{cx + d}{x^2 + 4x + 5}$
を満たす定数 a, b, c, d **を求める**

(2) それぞれの項の不定積分を計算して、
$\displaystyle\int f(x)\,dx$ **を求める**

x と $\sqrt[n]{ax+b}$ との有理式

少々乱暴にも見えるが、

$$y = \sqrt[n]{ax+b}$$

と置いてしまうのが簡明

$\longrightarrow y$ **の有理式の積分に帰着**

<u>x と $\sqrt{ax^2+bx+c}$ との有理式</u>

これも $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$ **と置いてみると、**

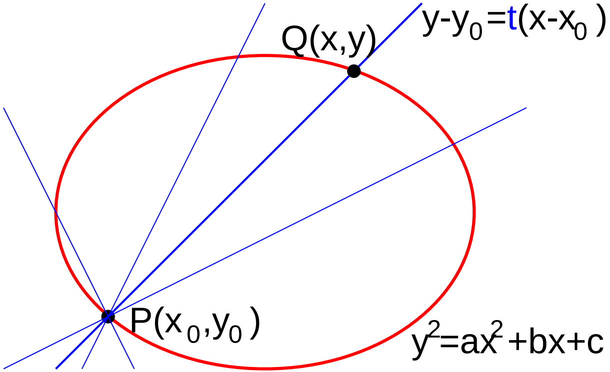
$$y^2=ax^2+bx+c$$

(楕円または双曲線の方程式)

$\longrightarrow$ **曲線上に 1 点を取ると、<u>有理媒介変数表示可能</u>**

$\longrightarrow$ **有理式の積分に帰着**

x と $\sqrt{ax^2+bx+c}$ との有理式



例： $\int \sqrt{1+x^2}\,dx$

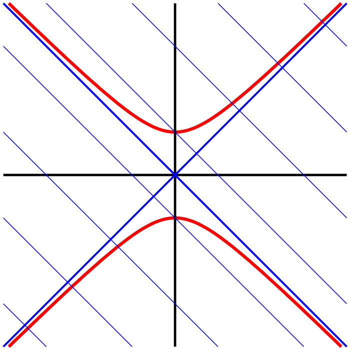
ものの本には「$t = x + \sqrt{1+x^2}$**」とあるが、**

そういうのは覚えようとすると切りがないので、

単純に $y = \sqrt{1+x^2}$ **と置いて、**

双曲線 $y^2 = 1 + x^2$ **の幾何を観察しよう**

例： $\displaystyle\int \sqrt{1+x^2}\,dx \quad \longrightarrow \quad y=\sqrt{1+x^2}$ **と置く**



双曲線

$$y^2 = 1 + x^2$$

の漸近線

$$x + y = 0$$

の "無限遠" に "点 P" を取る

"点 P" を通る直線は平行線

$$x + y = t$$

三角関数 $\sin\theta, \cos\theta$ の有理式

ものの本には「$t = \tan\dfrac{\theta}{2}$」とあるが、

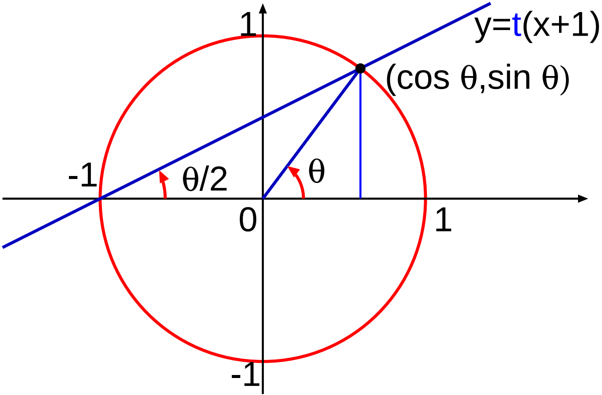
これも幾何を見よう

$$x = \cos\theta, \qquad y = \sin\theta$$

と置けば、円 $x^2 + y^2 = 1$ 上での積分

$\longrightarrow$ 円の有理媒介変数表示で有理式の積分に帰着

三角関数 $\sin\theta, \cos\theta$ の有理式



実際の応用では、

明示的な表示もさることながら、

- **収束性の吟味**
- **数値計算（近似値計算・数値積分）**
- **漸近的評価（$x \to +\infty$ での挙動）**

なども重要である

終わりに

無闇に計算するだけが数学じゃない。

- **現象を観察すること**
- **対象をどこまでも良く解ろうとすること**
- **それを紛れなく表現して伝えること**

が大切なのだ。

おしまい