2016 年度秋期

数の世界

（担当： 角皆）

情報技術と数理の利用

コンピュータの発展・情報化社会の進展に伴い、

数理の解明とその利用が
ますます社会と密接になってきた

数理技術

情報技術と数理の利用

コンピュータの発展・情報化社会の進展に伴い、

数理の解明とその利用が
ますます社会と密接になってきた

数理技術

情報技術と数理の利用

物理技術（17 世紀以来）：

基礎数理 $\Longrightarrow$ 物理現象 $\Longrightarrow$ 実用技術

理論的裏付け　　仕組みの構成

情報技術（20 世紀以来）：

数理現象 $\Longrightarrow$ 数理技術 $\Longrightarrow$ 実用技術

仕組みの構成　　物理的実現

数理の解明が直接に技術発展に繋がる

情報技術と数理の利用

物理技術（17 世紀以来）：

基礎数理 $\Longrightarrow$ 物理現象 $\Longrightarrow$ 実用技術

理論的裏付け　　仕組みの構成

情報技術（20 世紀以来）：

数理現象 $\Longrightarrow$ 数理技術 $\Longrightarrow$ 実用技術

仕組みの構成　　物理的実現

数理の解明が直接に技術発展に繋がる

情報技術と数理の利用

物理技術（17 世紀以来）：

基礎数理 $\Longrightarrow$ **物理現象** $\Longrightarrow$ **実用技術**

理論的裏付け　　**仕組みの構成**

情報技術（20 世紀以来）：

数理現象 $\Longrightarrow$ **数理技術** $\Longrightarrow$ **実用技術**

仕組みの構成　　**物理的実現**

数理の解明が直接に技術発展に繋がる

計算機で扱えるもの

計算機では本質的に

有限・離散

のものしか扱えない

- 無限・連続のものの近似
- 有限・離散であることの積極的活用

計算機で扱えるもの

計算機では本質的に

有限・離散

のものしか扱えない

- 無限・連続のものの近似
- 有限・離散であることの積極的活用

計算機で扱えるもの

計算機では本質的に

有限・離散

のものしか扱えない

- 無限・連続のものの近似
- 有限・離散であることの積極的活用

有限の算術（剰余系）

m：1 以上の整数を一つ取って固定

m で割った余りのみに注目して計算する

a と b とが m を法として合同
(congruent modulo m)

$$a \equiv b \pmod{m}$$

$\overleftarrow{\Longleftrightarrow}$ a と b とを m で割った余りが等しい

$\Longleftrightarrow$ $m \mid (a-b)$（$a-b$ が m で割切れる）

有限の算術（剰余系）

剰余のみに着目して
（well-defined に）足し算・掛け算が出来る

足し算表は
ほぼ当たり前
右表は $\mathrm{m} = 5$

$$3 + 4 = 7 \equiv 2 \pmod 5$$

$+$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

実習：剰余系の掛け算

$m = 3, 4, 5, 6, 7$ **について、**

演習プリントの掛け算表を埋めてみよう

掛け算表は
当たり前？
右表は $m = 5$

$2 \times 3 = 6 \equiv 1 \pmod 5$

$\times$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

（演習プリントの表には 0 の行・列はない）

実習：剰余系の掛け算

$\mathrm{m} = 3, 4, 5, 6, 7$ **について、**

演習プリントの掛け算表を埋めてみよう

m **の値による様子の違いは？**

剰余系の演算

$\mathrm{mod}\ m$ で考えたとき、a, b に対して、

$a + x \equiv b \pmod{m}$ となる x は
必ず丁度 1 つ見付かる

$\longrightarrow$ $\mathrm{mod}\ m$ で引き算が出来る
$\mathrm{mod}\ m$ の世界で “$x = b - a$”

しかし、

$ax \equiv b \pmod{m}$ となる x は
（$a \not\equiv 0 \pmod{m}$ でも）見付かるとは限らない

$\longrightarrow$ $\mathrm{mod}\ m$ で割り算が出来るとは限らない

剰余系の演算

$\mathrm{mod}\ m$ で考えたとき、a, b に対して、

$a + x \equiv b \pmod{m}$ となる x は
必ず丁度 1 つ見付かる

$\longrightarrow$ $\mathrm{mod}\ m$ で引き算が出来る
$\mathrm{mod}\ m$ の世界で “$x = b - a$”

しかし、

$ax \equiv b \pmod{m}$ となる x は
（$a \not\equiv 0 \pmod{m}$ でも）見付かるとは限らない

$\longrightarrow$ $\mathrm{mod}\ m$ で割り算が出来るとは限らない

素数を法とする剰余系の演算

一般の m **では**

$\bmod m$ **で割り算が出来るとは限らないが、**

法 m **が素数** p **であるときは、**

$a \not\equiv 0 \pmod{p}$ **であれば、**

$ax \equiv b \pmod{p}$ **となる** x **は**

必ず丁度 1 **つ見付かる**

$\longrightarrow$ $\bmod p$ **で（**0 **以外での）割り算も出来る**

$\bmod p$ **の世界で** “$x = b/a$”

素数を法とする剰余系の演算

一般の m **では**

$\mod m$ **で割り算が出来るとは限らないが、**

法 m **が素数** p **であるときは、**

$a \not\equiv 0 \pmod{p}$ **であれば、**

$ax \equiv b \pmod{p}$ **となる** x **は**

必ず丁度 1 **つ見付かる**

$\longrightarrow$ $\mod p$ **で（**0 **以外での）割り算も出来る**

$\mod p$ **の世界で “**$x = b/a$**”**

有限体

体 (field)：四則演算（加減乗除）が出来る集合

例：有理数体 $\mathbb{Q}$・実数体 $\mathbb{R}$・複素数体 $\mathbb{C}$

素数 p に対して、

p で割った余りの集合 $\overset{1:1}{\longleftrightarrow} \{0, 1, \ldots, p-1\}$

この中で（0 で割る以外の）四則演算が出来る

$\cdots$ 有限体 (finite field)・p 元体　　$\mathbb{F}_p$, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

有限体

体 (field)：四則演算（加減乗除）が出来る集合

例：有理数体 $\mathbb{Q}$・実数体 $\mathbb{R}$・複素数体 $\mathbb{C}$

素数 p に対して、

p で割った余りの集合 $\overset{1:1}{\longleftrightarrow} \{0, 1, \ldots, p-1\}$

この中で（0 で割る以外の）四則演算が出来る

$\cdots$ 有限体 (finite field)・p 元体　　$\mathbb{F}_p$, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

有限体

体 (field)：四則演算（加減乗除）が出来る集合

例：有理数体 $\mathbb{Q}$・実数体 $\mathbb{R}$・複素数体 $\mathbb{C}$

素数 p に対して、

p で割った余りの集合 $\overset{1:1}{\longleftrightarrow} \{0, 1, \ldots, p-1\}$

この中で（0 で割る以外の）四則演算が出来る

$\cdots$ **有限体** (finite field)・p 元体　　$\mathbb{F}_p$, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

有限体

体 (field)：四則演算（加減乗除）が出来る集合

$\longrightarrow$ 四則演算しか使わない計算なら、
有限体 $\mathbb{F}_p$ 上でも
実数や複素数と同様に行なえる

例：連立 1 次方程式を解く

大小関係・極限・収束などはない

物理技術の利用においては、

微分積分（**解析学**）がその基礎となったが、

有限・離散な世界である計算機上の
情報・数理技術の利用においては、

抽象代数学がその基礎となっている

- 基礎理学はすぐには役に立たない
- けれども不思議といつか役に立つ
- それがいつかは判らない

⟶ “良いもの” を追い求めるのが大切

物理技術の利用においては、

微分積分（解析学）がその基礎となったが、

有限・離散な世界である計算機上の
情報・数理技術の利用においては、

抽象代数学がその基礎となっている

- 基礎理学はすぐには役に立たない
- けれども不思議といつか役に立つ
- それがいつかは判らない

⟶ “良いもの” を追い求めるのが大切

物理技術の利用においては、

微分積分（解析学）がその基礎となったが、

有限・離散な世界である計算機上の
情報・数理技術の利用においては、

抽象代数学がその基礎となっている

- 基礎理学はすぐには役に立たない
- けれども不思議といつか役に立つ
- それがいつかは判らない

$\longrightarrow$ “良いもの”を追い求めるのが大切

数理技術としての応用例 1

有限体の算術を利用した、
ちょっと不思議な応用例を紹介しよう

秘密分散

（秘密情報の安全な管理の一方法）

秘密分散

盗賊の親分が隠し財宝の在処を子分達に伝える
（会社の社長が超重要機密を重役達に伝える）

伝える相手は 3 人

それぞれに異なる手掛かりを教える

但し、

- **どの 1 人も自分だけでは何も判らない**
- **どの 2 人でも教え合えば判る**

ようにするにはどうしたら良いか？

秘密分散

アナログ技術で実現するのは中々難しそうだ

$\longrightarrow$ ディジタル技術・数理技術の利用

$\longrightarrow$ 秘密情報を数値化・符号化して処理
（有限・離散の世界の積極的活用）

秘密分散

駄目な例 1：秘密情報を 3 桁の数字列として
各人に 1 桁づつ教える

- **2 人がつるんでも判らない**
- **各人は何も知らないよりも情報がある**

駄目な例 2：秘密情報を 3 桁の数字列として
各人に 2 桁づつ教える

- **2 人がつるめば判るが、**
- **各人は何も知らないよりも情報がある**

秘密分散

駄目な例 1：秘密情報を 3 桁の数字列として
各人に 1 桁づつ教える

- **2 人がつるんでも判らない**
- **各人は何も知らないよりも情報がある**

駄目な例 2：秘密情報を 3 桁の数字列として
各人に 2 桁づつ教える

- **2 人がつるめば判るが、**
- **各人は何も知らないよりも情報がある**

秘密分散

- 素数 p を固定（これは公開）
- 秘密情報は有限体 $\mathbb{F}_p$ の元 b とする
- ランダムに $\mathbb{F}_p$ の元 a を選ぶ（これも秘密）
- $\mathbb{F}_p$ 上の“直線” $y = ax + b$ を考える
- 各子分に対して
  - ⋆ 異なる $\mathbb{F}_p$ の元 $x_i (\neq 0)$ を選び
    $y_i = ax_i + b$ を計算する
  - ⋆ “直線上の点” (x_i, y_i) を教える

秘密分散

- 素数 p を固定（これは公開）
- 秘密情報は有限体 $\mathbb{F}_p$ の元 b とする
- ランダムに $\mathbb{F}_p$ の元 a を選ぶ（これも秘密）
- $\mathbb{F}_p$ 上の “直線” $y = ax + b$ を考える
- 各子分に対して
  - ⋆ 異なる $\mathbb{F}_p$ の元 $x_i (\neq 0)$ を選び
    $y_i = ax_i + b$ を計算する
  - ⋆ “直線上の点” (x_i, y_i) を教える

秘密分散

- 素数 p を固定（これは公開）
- 秘密情報は有限体 $\mathbb{F}_p$ の元 b とする
- ランダムに $\mathbb{F}_p$ の元 a を選ぶ（これも秘密）
- $\mathbb{F}_p$ 上の “直線” $y = ax + b$ を考える
- 各子分に対して
  - ⋆ 異なる $\mathbb{F}_p$ の元 $x_i (\neq 0)$ を選び
    $y_i = ax_i + b$ を計算する
  - ⋆ “直線上の点” (x_i, y_i) を教える

秘密分散

2 人つるむと判る理由：

2 点を通る “直線” $y = ax + b$ は唯一に定まる

2 点 $(x_i, y_i), (x_j, y_j)$ を通る直線は

$$a = \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}, \qquad b = y_i - \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j} x_i$$

$\longrightarrow$ 秘密情報 b が判明した

秘密分散

1 人では判らない理由：

2 点を通る “直線” $y = ax + b$ は必ず存在する

2 点 $(x_i, y_i), (0, b)$ を通る直線の傾きは

$$a = \frac{y_i - b}{x_i}$$

どの値 b も同様に可能性がある

$\longrightarrow$ 何も知らないのと同じ

実習：秘密分散

みなさんに配った “秘密情報の一部”（鍵）

$$(x, y)$$

1 次式 $y \equiv ax + b \pmod{11}$ **で**
秘密情報 b **を分散して伝えたもの**

近くの人の鍵を見せてもらって
秘密情報 b **を復元しよう**
（鍵が同じ値だったら他の近くの人に）

実習：秘密分散

- 法 $p = 11$ に関する掛け算表を埋めよう
  （なくても出来れば、埋めなくても良い）
- 引き算 $b - a$ はどうするの？
  $\longrightarrow a + x = b$ となる x が $x = b - a$
  $\longrightarrow b - a < 0$ なら p を足せば良い
- 割り算 $\frac{b}{a}$ はどうするの？
  $\longrightarrow ax = b$ となる x が $x = \frac{b}{a}$
  $\longrightarrow$ 拡張互除法で計算できるが、
  今は表から探そう

「割り算」って何さ？— 定義に立ち戻ること

有限体での $\frac{b}{a}$ とは何か？

「割り算」とは何だったか？

$\frac{b}{a}$ とは、$ax = b$ となる（ただ一つの）x のこと

定義に立ち戻る（定義から出発する）ことで、
何であるかがはっきりする

「割り算」って何さ？— 定義に立ち戻ること

有限体での $\frac{b}{a}$ とは何か？

「割り算」とは何だったか？

> **$\frac{b}{a}$ とは、$ax = b$ となる（ただ一つの）x のこと**

定義に立ち戻る（定義から出発する）ことで、
何であるかがはっきりする

「割り算」って何さ？— 定義に立ち戻ること

有限体での $\frac{b}{a}$ とは何か？

「割り算」とは何だったか？

$\frac{b}{a}$ とは、$ax = b$ となる（ただ一つの）x のこと

定義に立ち戻る（定義から出発する）ことで、
何であるかがはっきりする

「割り算」って何さ？— 定義に立ち戻ること

有限体での $\frac{b}{a}$ とは何か？

「割り算」とは何だったか？

$\frac{b}{a}$ とは、$ax = b$ となる（ただ一つの）x のこと

定義に立ち戻る（定義から出発する）ことで、
何であるかがはっきりする

秘密分散

今は 1 次式（“直線” $y = ax + b$）を使ったので、
2 人が見せ合えば判ったが、

3 人の協力で判るようにするには、
2 次式（“放物線” $y = ax^2 + bx + c$）を使えば良い

一般に、

k 人の協力で判るようにするには、
$(k-1)$ 次式を使って仕組みを設計すればよい

（“n 人中 k 人” で出来る）

秘密分散

今は 1 次式（“直線” $y = ax + b$）を使ったので、
2 人が見せ合えば判ったが、

3 人の協力で判るようにするには、
2 次式（“放物線” $y = ax^2 + bx + c$）を使えば良い

一般に、

k 人の協力で判るようにするには、
$(k-1)$ 次式を使って仕組みを設計すればよい

（“n 人中 k 人” で出来る）

秘密分散

- **秘密を分散する人数は余り関係ない**
  $\longrightarrow$ 人数より大きな素数 p を用いれば良い

- **あてずっぽうでも確率 $\frac{1}{p}$ で当たってしまう**
  $\longrightarrow$ 実際には大きな素数 p を使う
  （100 桁とか 200 桁とか）

- **割り算の計算を効率良く行なう必要がある**
  $\longrightarrow$ Euclid の拡張互除法を用いる

秘密分散

- 秘密を分散する人数は余り関係ない
  $\longrightarrow$ 人数より大きな素数 p を用いれば良い

- あてずっぽうでも確率 $\frac{1}{p}$ で当たってしまう
  $\longrightarrow$ 実際には大きな素数 p を使う
  （100 桁とか 200 桁とか）

- 割り算の計算を効率良く行なう必要がある
  $\longrightarrow$ Euclid の拡張互除法を用いる

秘密分散

- 秘密を分散する人数は余り関係ない
  $\longrightarrow$ 人数より大きな素数 p を用いれば良い

- あてずっぽうでも確率 $\frac{1}{p}$ で当たってしまう
  $\longrightarrow$ 実際には大きな素数 p を使う
  （100 桁とか 200 桁とか）

- 割り算の計算を効率良く行なう必要がある
  $\longrightarrow$ Euclid の拡張互除法を用いる

秘密分散

- 秘密を分散する人数は余り関係ない
  $\longrightarrow$ 人数より大きな素数 p を用いれば良い

- あてずっぽうでも確率 $\frac{1}{p}$ で当たってしまう
  $\longrightarrow$ 実際には大きな素数 p を使う
  （100 桁とか 200 桁とか）

- 割り算の計算を効率良く行なう必要がある
  $\longrightarrow$ Euclid の拡張互除法を用いる

秘密分散

- 秘密を分散する人数は余り関係ない
  $\longrightarrow$ 人数より大きな素数 p を用いれば良い

- あてずっぽうでも確率 $\frac{1}{p}$ で当たってしまう
  $\longrightarrow$ 実際には大きな素数 p を使う
  （100 桁とか 200 桁とか）

- 割り算の計算を効率良く行なう必要がある
  $\longrightarrow$ **Euclid の拡張互除法**を用いる

数理技術としての応用例２

暗号 (cryptography)

- 秘密通信
- 電子認証・電子署名
- 鍵共有

暗号の利用

- **古典的：戦争・謀略など**
- **現代：情報通信一般**

$\longrightarrow$ **個人の独立を守るための重要な数理技術**

暗号の利用

- 古典的：戦争・謀略など
- 現代：情報通信一般

$\longrightarrow$ 個人の独立を守るための重要な数理技術

暗号の利用

- **古典的：戦争・謀略など**
- **現代：情報通信一般**

$\longrightarrow$ **個人の独立を守るための重要な数理技術**

既に身近な暗号の利用

メディアセンターのコンピュータを使う際の
パスワードによる本人認証にも
暗号（暗号化）が使われている

入力したパスワードを
保管してあるデータと照合しているのだが、

実は、
パスワードそのものを保管しているのではない

定まった方式（暗号化関数）で
パスワードを変換して保管している

既に身近な暗号の利用

メディアセンターのコンピュータを使う際の
パスワードによる本人認証にも
暗号（暗号化）が使われている

入力したパスワードを
保管してあるデータと照合しているのだが、

実は、
パスワードそのものを保管しているのでは**ない**

定まった方式（暗号化関数）で
パスワードを変換して保管している

既に身近な暗号の利用

メディアセンターのコンピュータを使う際の
パスワードによる本人認証にも
暗号（暗号化）が使われている

入力したパスワードを
保管してあるデータと照合しているのだが、

実は、
パスワードそのものを保管しているのでは**ない**

定まった方式（暗号化関数）で
パスワードを変換して保管している

パスワードによる本人認証

- 暗号化関数でパスワードを変換して保管
- 入力したパスワードを暗号化関数で変換して、
  保管してある文字列と照合

暗号化関数に要請される性質は？

- 間違った文字列では変換結果が一致しない
  $\longrightarrow$ 異なる入力には異なる値を返す（単射）
- 保管してある文字列が露見しても
  元のパスワードが判明しない
  $\longrightarrow$ 一方向性関数 (one-way function)

パスワードによる本人認証

- 暗号化関数でパスワードを変換して保管
- 入力したパスワードを暗号化関数で変換して、
  保管してある文字列と照合

暗号化関数に要請される性質は？

- 間違った文字列では変換結果が一致しない
  $\longrightarrow$ 異なる入力には異なる値を返す（単射）
- 保管してある文字列が露見しても
  元のパスワードが判明しない
  $\longrightarrow$ 一方向性関数 (one-way function)

パスワードによる本人認証

- 暗号化関数でパスワードを変換して保管
- 入力したパスワードを暗号化関数で変換して、
  保管してある文字列と照合

暗号化関数に要請される性質は？

- 間違った文字列では変換結果が一致しない
  $\longrightarrow$ 異なる入力には異なる値を返す（単射）
- 保管してある文字列が露見しても
  元のパスワードが判明しない
  $\longrightarrow$ **一方向性関数** (one-way function)

パスワードによる本人認証

良い暗号化関数で変換して保管していても

通信経路の途中で盗聴されてしまっては

パスワードが露見してしまう

⟶ 暗号による秘密通信

パスワードによる本人認証

良い暗号化関数で変換して保管していても

通信経路の途中で盗聴されてしまっては

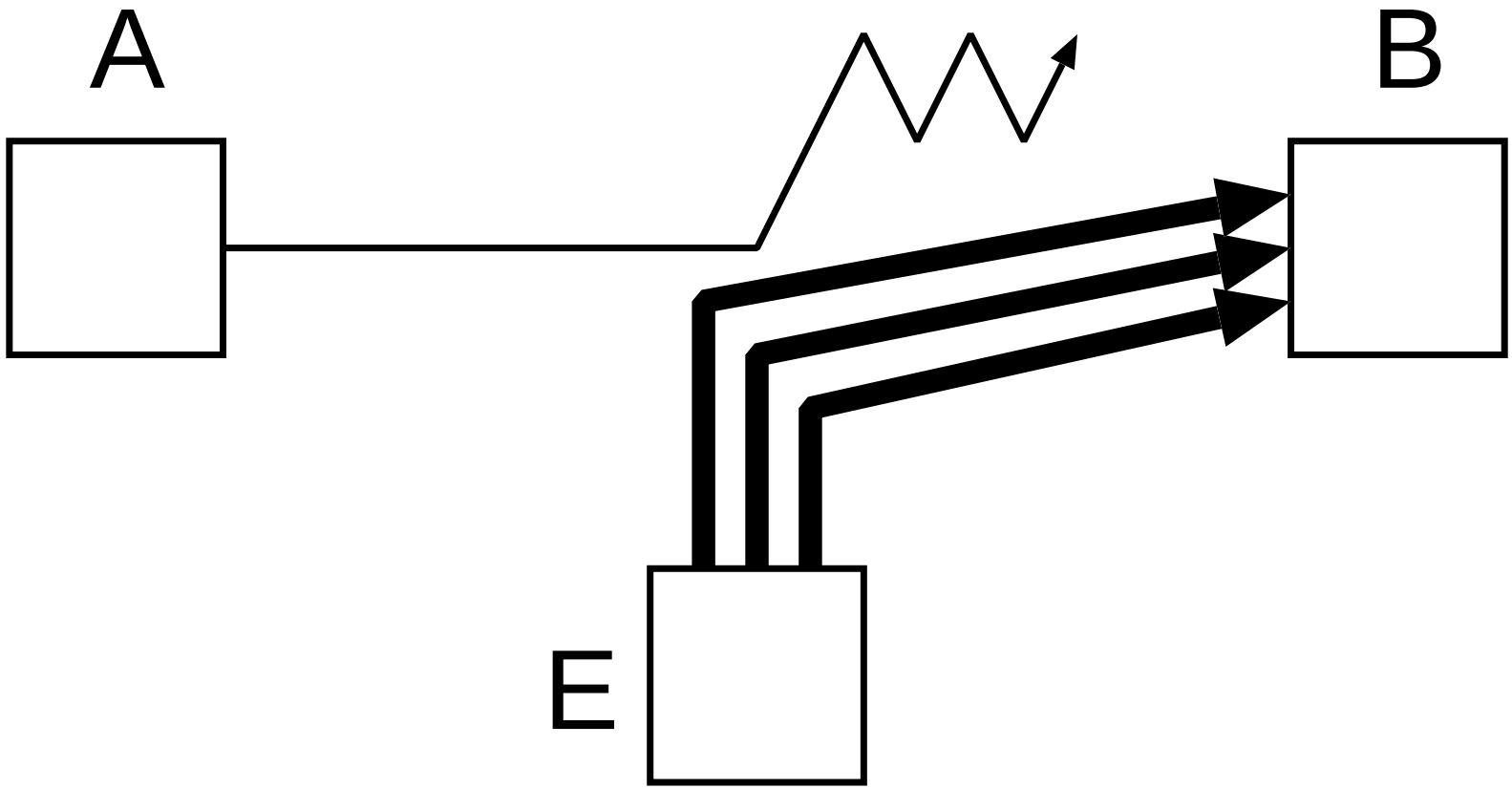
パスワードが露見してしまう

$\longrightarrow$ **暗号**による秘密通信

安全な情報伝達を阻害するもの

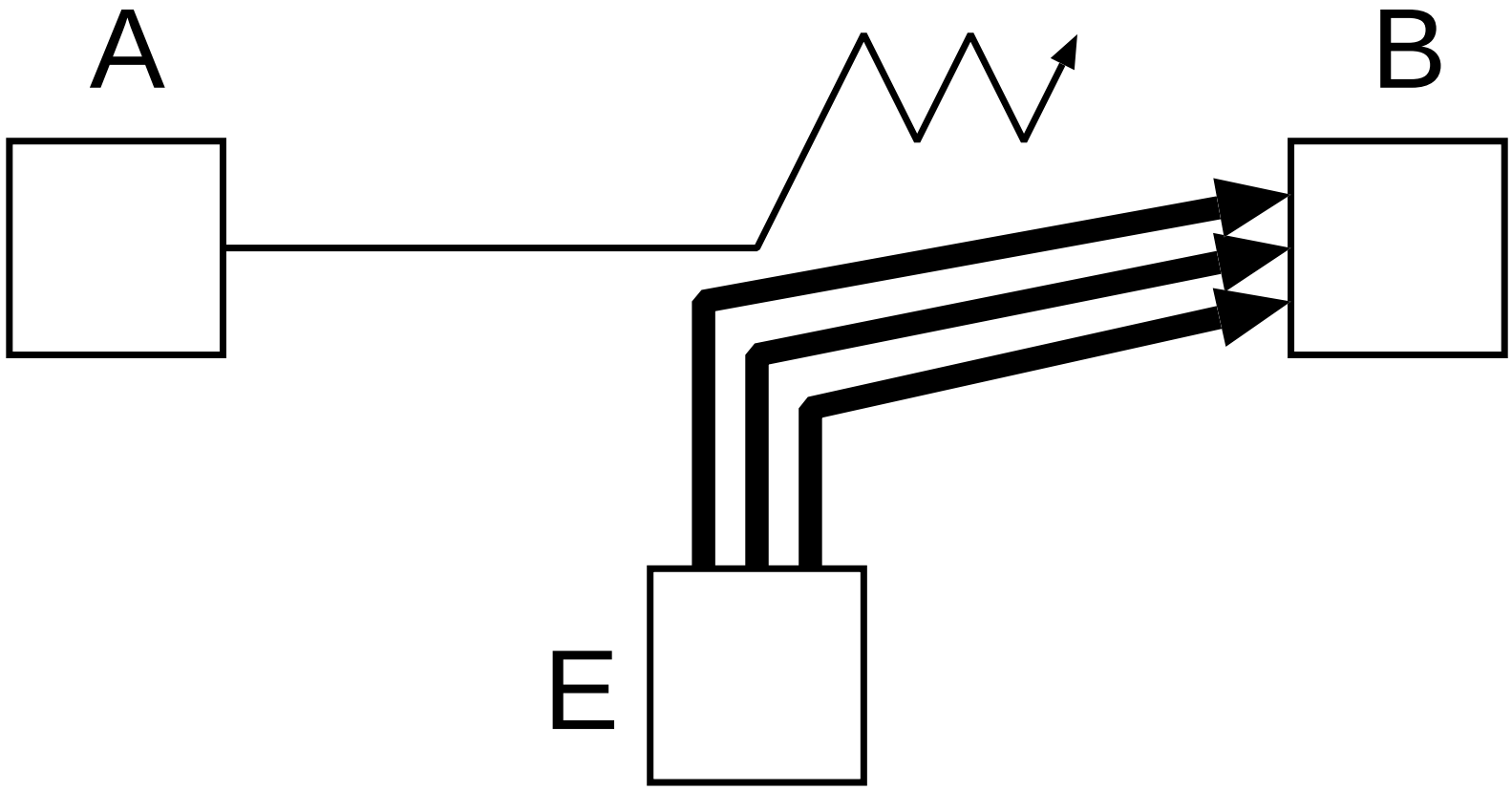
- 妨害（DoS 攻撃など）
- 盗聴
- 改竄
- なり済まし　　など

DoS (Denial of Service) 攻撃



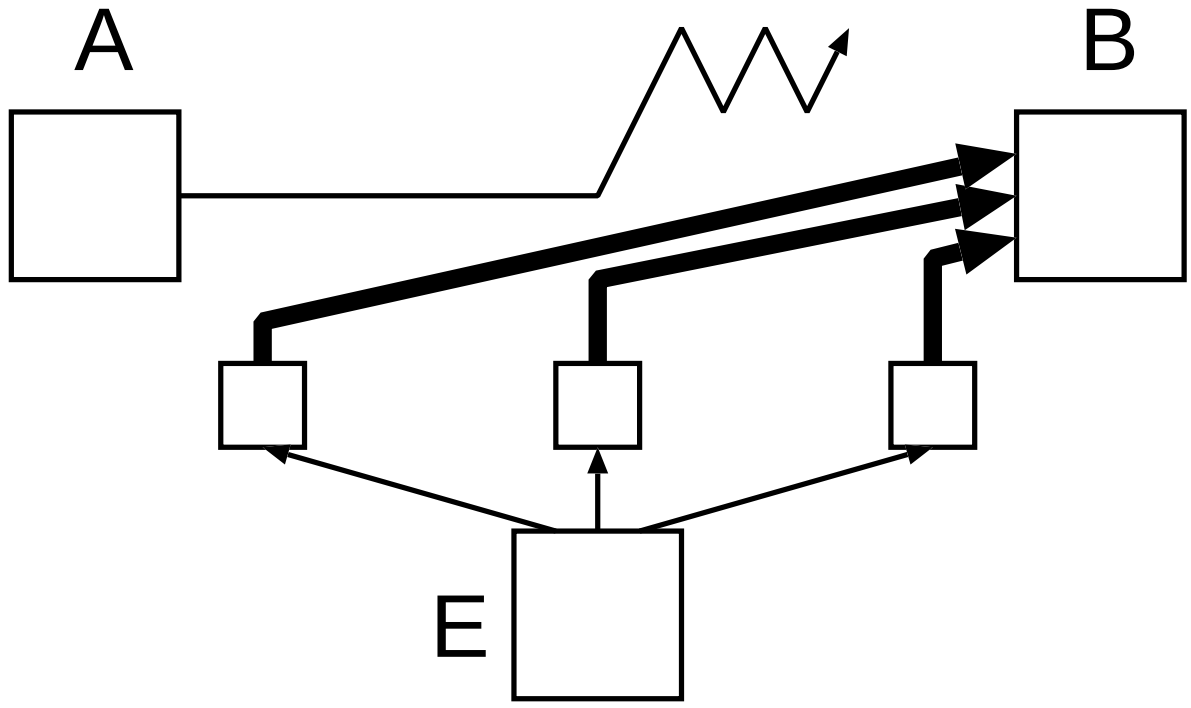
B を機能停止に追い込むには
E に相当のマシンパワーが必要
そこで実際には ···

DoS (Denial of Service) 攻撃



B を機能停止に追い込むには
E に相当のマシンパワーが必要
そこで実際には ...

DoS (Denial of Service) 攻撃



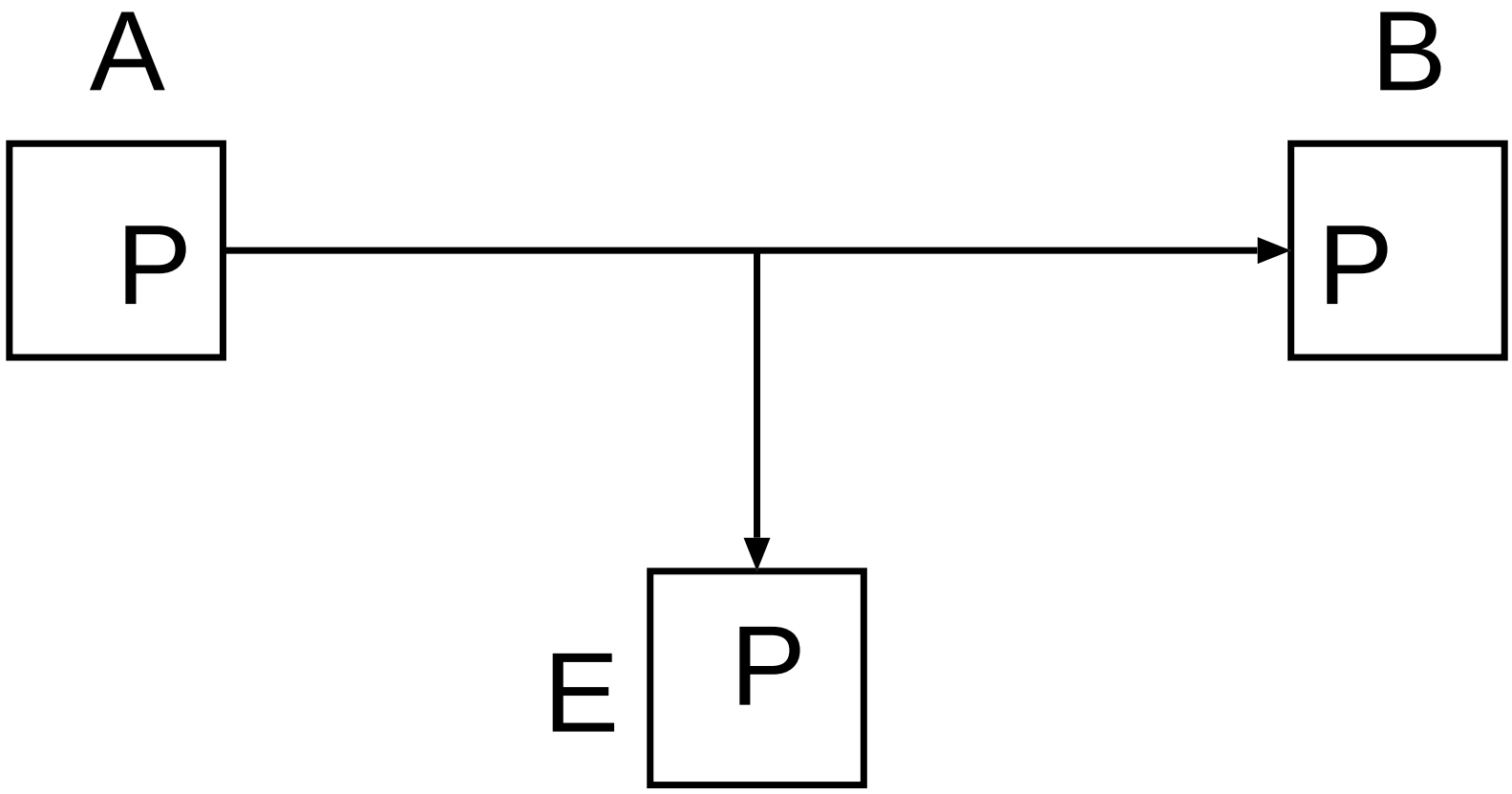
実際には、

コンピュータウイルス・乗っ取りなどで

制御下に置いた多数の機械から一斉に攻撃

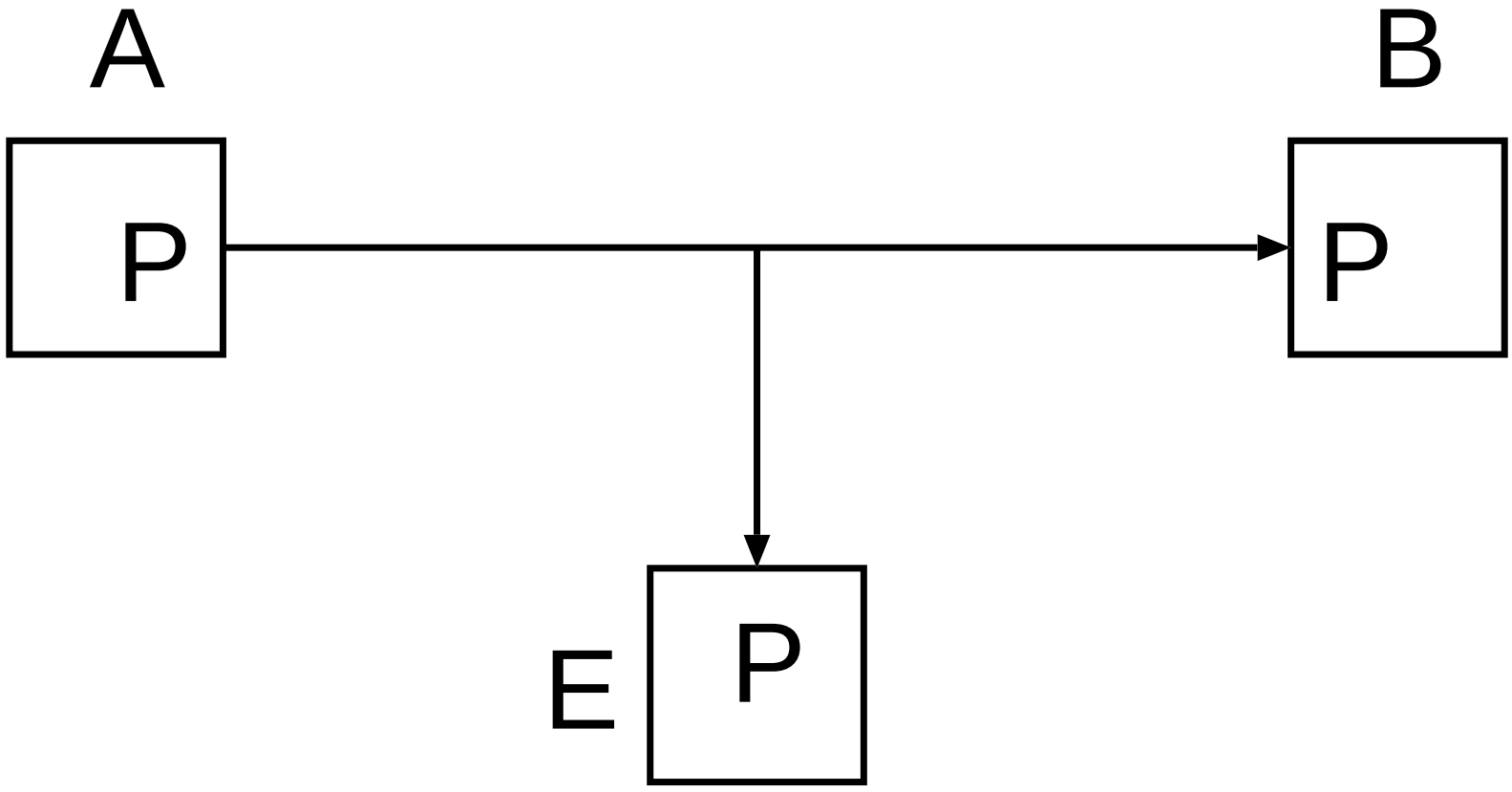
(Distributed DoS, DDoS)

盗聴



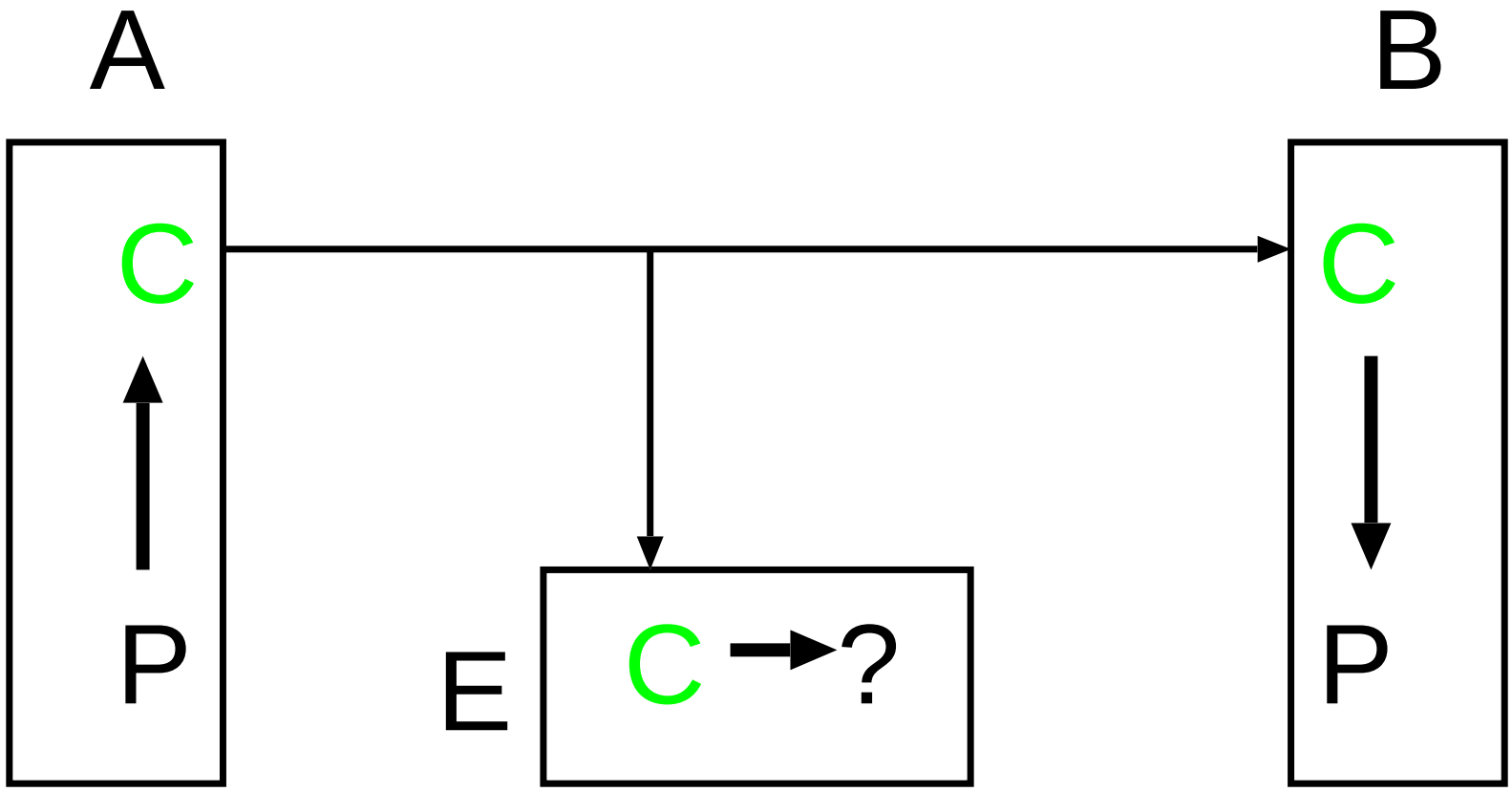
現在の計算機ネットワークの仕組みでは、
事実上、通信経路は誰にでも見られる

盗聴



現在の計算機ネットワークの仕組みでは、
事実上、通信経路は誰にでも見られる

暗号通信で盗聴対策

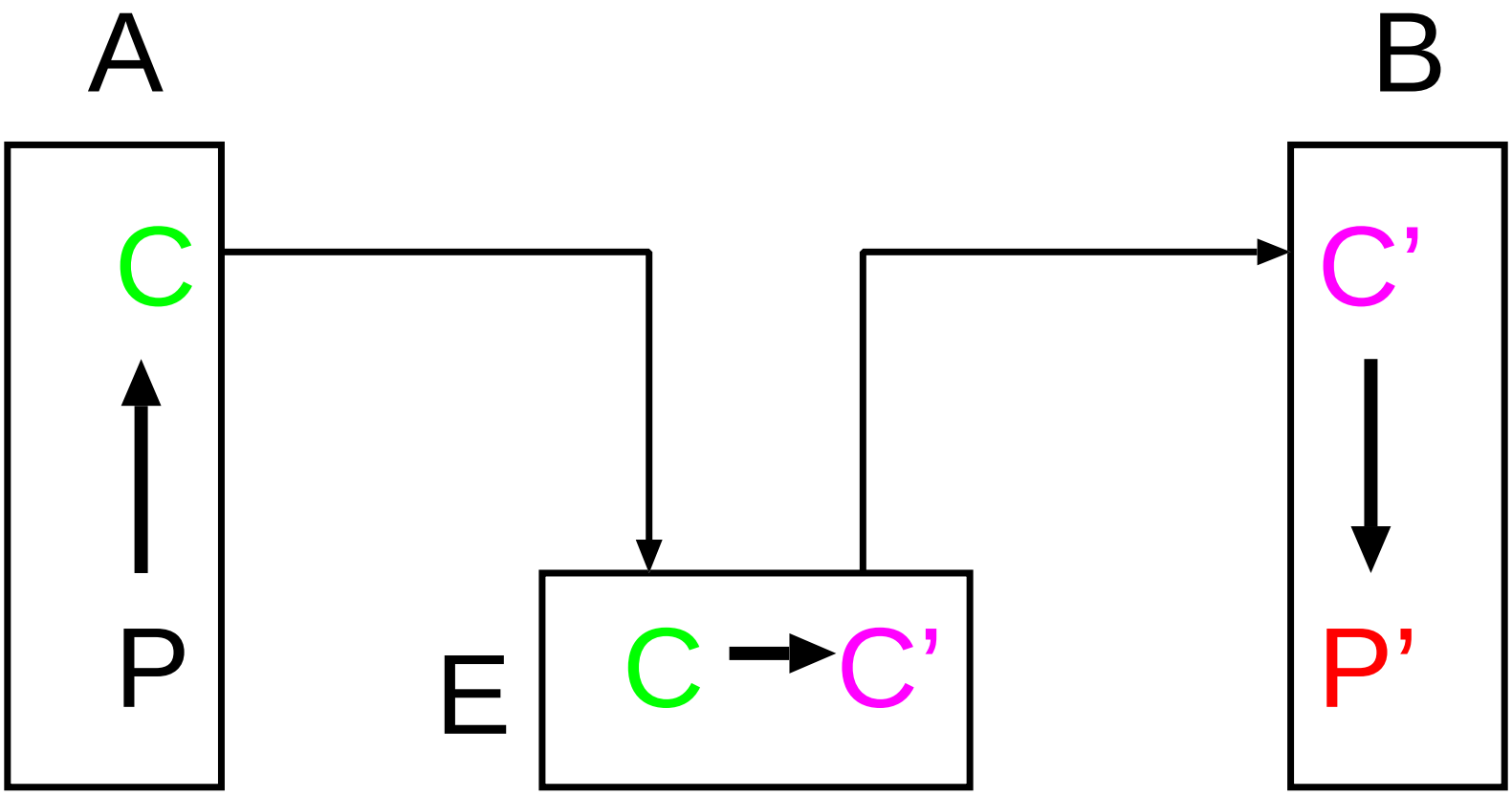


P：平文 (plain text)，　C：暗号文 (ciphertext)

P → C：暗号化 (encryption)

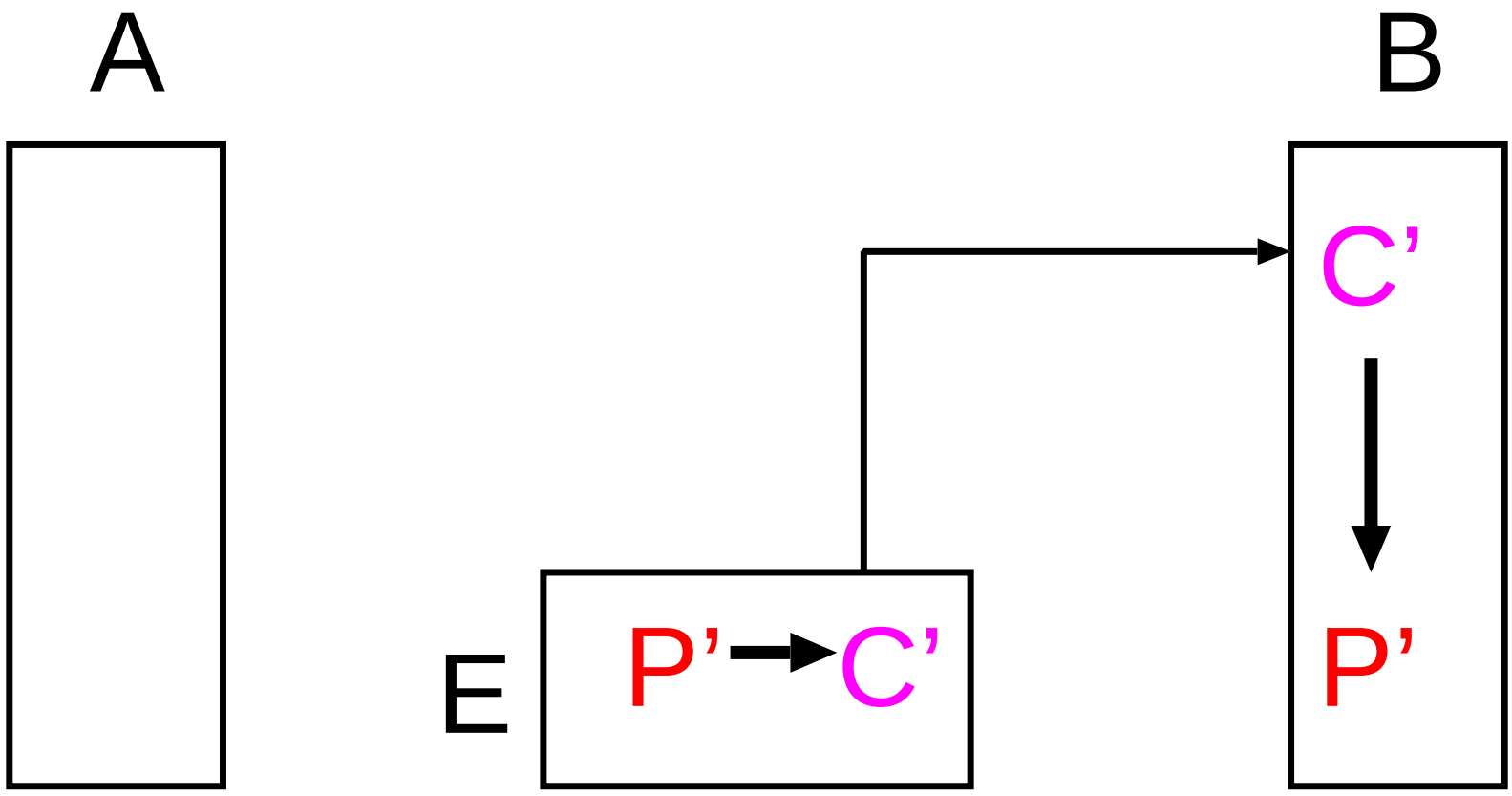
C → P：復号 (decryption)・解読

改竄



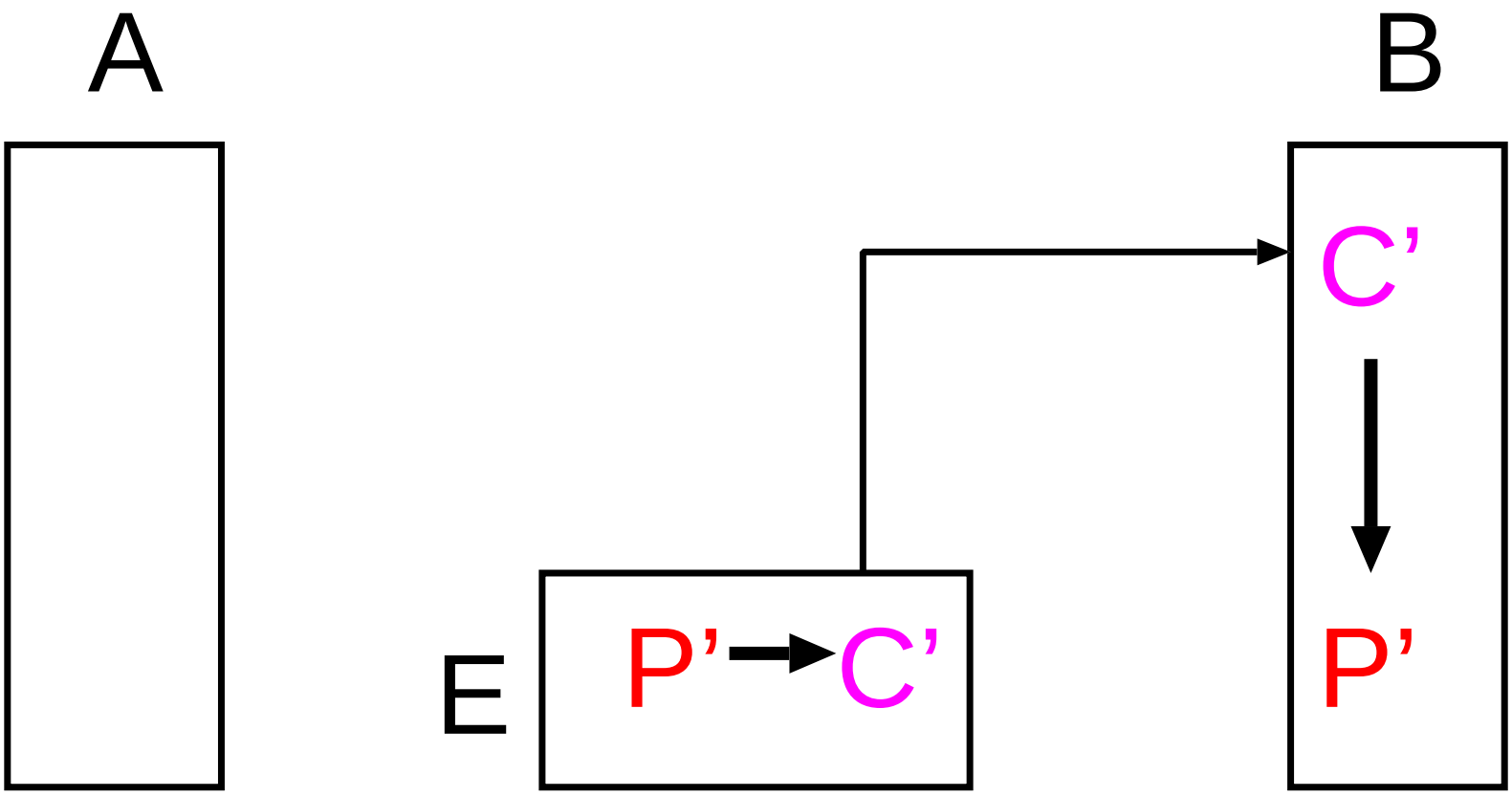
A が送信した情報であることを
確かめられるような仕組みが必要
（電子認証・電子署名）

なり済まし



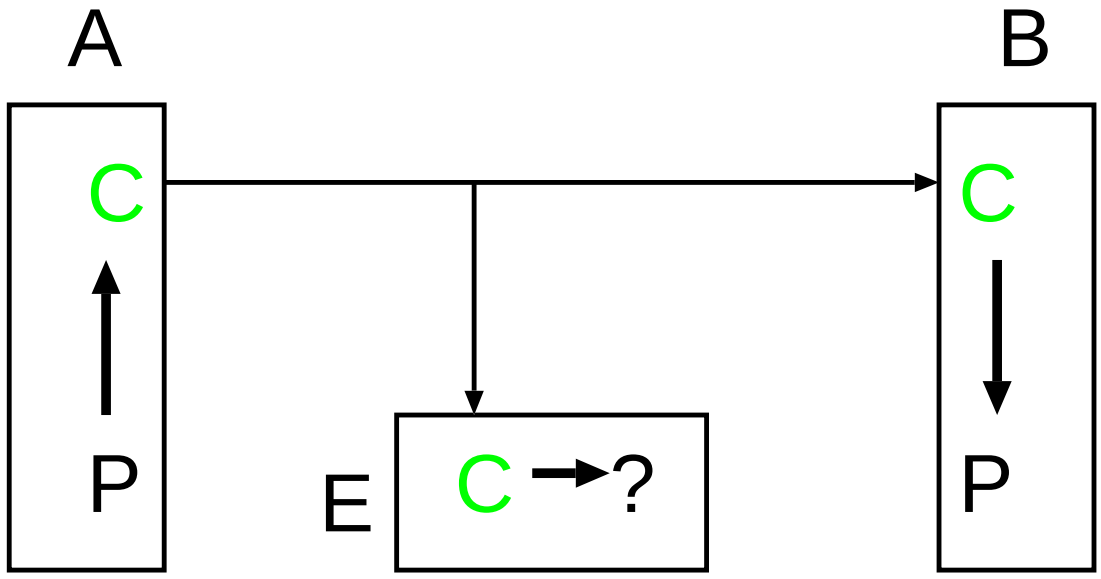
A が送信した情報であることを
確かめられるような仕組みが必要
（電子認証・電子署名）

なり済まし



A が送信した情報であることを
確かめられるような仕組みが必要
（電子認証・電子署名）

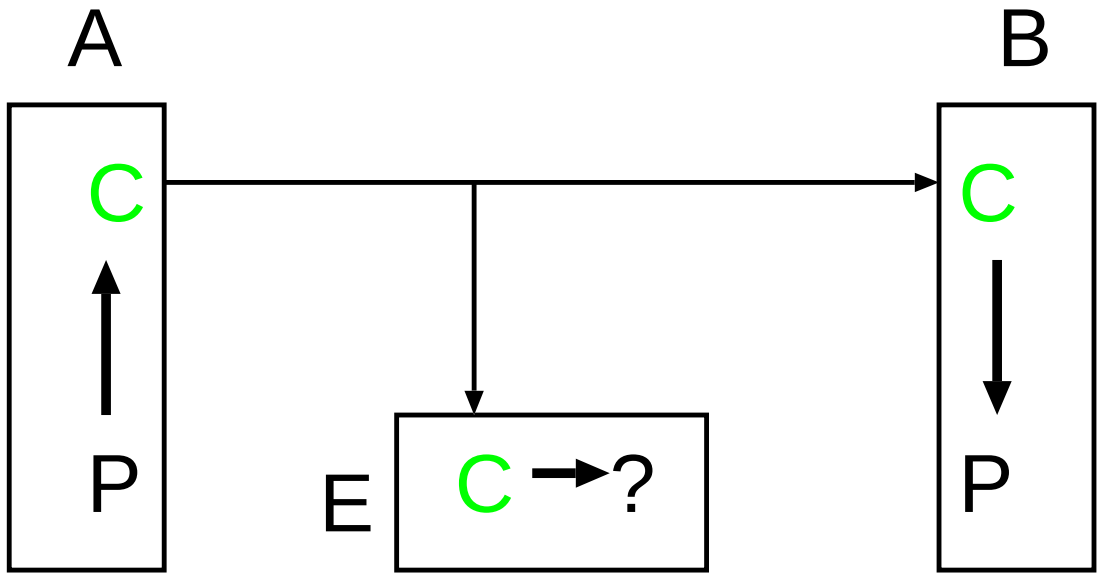
暗号 (cryptography)



- 送信者 A が平文 P を暗号化、暗号文 C を送信
- 受信者 B が暗号文 C を受信、平文 P に復号
- 盗聴者 E は暗号文 C を知っても
  平文 P を復元できない

⟶ B だけが復号鍵を持っていることが必要

暗号 (cryptography)



- 送信者 A が平文 P を暗号化、暗号文 C を送信
- 受信者 B が暗号文 C を受信、平文 P に復号
- 盗聴者 E は暗号文 C を知っても
  平文 P を復元できない

$\longrightarrow$ B だけが**復号鍵**を持っていることが必要

次回に続く