

8. R を規定する公理たち

本節では、実数全体の成す順序体 R を、有理数全体の成す順序体 Q を含む所定の公理を満たすものとして定式化する、という立場で考える。

有理数全体の成す順序体 Q を含む順序体 R に対し、次は同値である：

- (1) (Dedekind の公理) R の切断 (A, B) には、 $\max A, \min B$ のどちらかが存在する。
- (2) (上限の存在) R の空でない部分集合 X が上に有界ならば、上限 $\sup X$ が存在する。
- (3) (有界単調数列の収束) R 内の上に有界な単調非減少数列 $a = (a_n)_{n=0}^{\infty}$ は、(その上限に) 収束する。
- (4) (上極限の存在) R 内の有界な数列 $a = (a_n)_{n=0}^{\infty}$ には、上極限 $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ が存在する。
- (5) (Bolzano-Weierstrass の原理) R 内の有界な数列 $a = (a_n)_{n=0}^{\infty}$ には、集積点が存在する。
- (6) (Archimedes の原理) 任意の正数 $\varepsilon, M > 0$ に対し、自然数 $N \in \mathbf{N}$ が存在して、 $N\varepsilon > M$ となる。+ (縮小区間列の原理) R 内の閉区間の列 $(I_n)_{n=0}^{\infty}$ が縮小区間列ならば、 $\bigcap_{n \geq 0} I_n$ は丁度 1 点のみから成る。
- (7) (Archimedes の原理) + (Cauchy 列の収束) R 内の Cauchy 列 $a = (a_n)_{n=0}^{\infty}$ は、或る $\alpha \in R$ に収束する。(このとき R は完備であるという。)

Q を含む上のいずれか(従って全て)を満たす順序体は、自然な同型を除いて一意である。即ち、 R, R' がともに条件を満たすとするとき、順序体の構造を保つ全単射 $\varphi: R \rightarrow R'$ で、 Q 上では恒等写像であるものが一意に存在する。そこで、この同型を除いて定まる順序体を実数体と呼んで R と書き、その元を実数という。

以下、 R を Q を含む順序体(または素朴に知っている実数体 R) とし、上に現れた用語の定義を述べながら、問を挙げる。

問 8-1A. $a \in R$ に対し、 $\forall \varepsilon > 0: a < \varepsilon$ ならば $a \leq 0$ である。特に、 $\forall \varepsilon > 0: |a| < \varepsilon$ ならば $a = 0$ である。

問 8-2A. R の部分集合 M の最小の上界を上限といい、 $\sup M$ と書く。 $x = \sup M$ であることは次で特徴づけられる：

- (1) $\forall m \in M: m \leq x$
- (2) $\forall \varepsilon > 0: \exists m \in M: x - \varepsilon < m$

問 8-3A. R の部分集合 M の下限 $\inf M$ について同様のことを考えよ。

問 8-4A. R の部分集合 M に最大値 $\max M$ が存在すれば、それは上限 $\sup M$ でもある。最小値・下限についても同様。

問 8-5A. R の次の部分集合の最大値・最小値・上限・下限は存在するか。存在するならその値は何か。

- (1) 閉区間 $I = [a, b] = \{x \in \mathbf{R} | a \leq x \leq b\}$
- (2) 开区間 $I = (a, b) = \{x \in \mathbf{R} | a < x < b\}$
- (3) 無限閉区間 $I = [a, +\infty) = \{x \in \mathbf{R} | a \leq x\}$
- (4) 無限开区間 $I = (a, +\infty) = \{x \in \mathbf{R} | a < x\}$

問 8-6B. R の区間について次が成り立つ：

- (1) $\bigcup_{\varepsilon > 0} [a + \varepsilon, b - \varepsilon] = (a, b)$
- (2) $\bigcap_{\varepsilon > 0} (a - \varepsilon, b + \varepsilon) = [a, b]$

問 8-7B. 数列 $a = (a_n)_{n=0}^{\infty}$ については、その値のなす集合 $\{a_n | n \in \mathbf{N}\}$ の上限を a の上限といい、ここでは、以下、単に $\sup a$ と書くことにする。数列 $a = (a_n)_{n=0}^{\infty}, b = (b_n)_{n=0}^{\infty}$ について、 $\sup a, \sup b$ が共に存在するとき、 $a + b := (a_n + b_n)_{n=0}^{\infty}$ で定める数列 $a + b$ について、 $\sup(a + b) \leq \sup a + \sup b$ であることを示せ。また、等号が成り立たない例を挙げよ。

問 8-8B. 数列 $a = (a_n)_{n=0}^{\infty}$ において、各 $n \in \mathbf{N}$ に対して $b_n := \sup\{a_m \mid m \geq n\}$ が存在するとき、数列 $b = (b_n)_{n=0}^{\infty}$ は単調非増加、即ち $b_0 \geq b_1 \geq b_2 \geq \dots$ (広義単調減少ともいう。ここでは以下、これを単に単調減少ということにする。) であり、この b の下限 $\inf b$ を、数列 a の上極限と言って、 $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n, \overline{\lim} a_n, \limsup a$ 等と書く。

(1) 上極限は次の性質で特徴付けられることを示せ： $x = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \iff$

- $\forall \varepsilon > 0 : \forall n \in \mathbf{N} : \exists m > n : a_m > x - \varepsilon$
- $\forall \varepsilon > 0 : \exists n \in \mathbf{N} : \forall m > n : a_m < x + \varepsilon$

(2) 下極限 $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n, \underline{\lim} a_n, \liminf a$ も同様に定義せよ。また、上のような特徴付けを書いてみよう。

問 8-9B. 数列 $a = (a_n)_{n=0}^{\infty}$ について、上極限・下極限がともに存在して一致すれば、 a はその値に収束することを示せ。

問 8-10A. 次で定まる実数列 $a = (a_n)_{n=0}^{\infty}$ の上極限・下極限は何か。

(1) $a_n = \frac{1}{2^n}$ (2) $a_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)$ (3) $a_n = \sin \frac{n\pi}{2}$

問 8-11B. 数列 $a = (a_n)_{n=0}^{\infty}$ において、 α が次の性質を満たすとき a の集積値 (の一つ) であるという：

- $\forall \varepsilon > 0 : \forall N \in \mathbf{N} : \exists m > N : |a_m - \alpha| < \varepsilon$

(これは、 α から距離 ε 以内に無限個の a_n がある、ということと同じである。)

- (1) 集積値が複数ある実数列 a の例を挙げよ。
- (2) 集積値が無限個ある実数列 a の例を挙げよ。
- (3) a の上極限が存在すれば、それは最大の集積値であることを示せ。(下極限についても同様。)
- (4) a が収束すれば、その極限は唯一の集積値であることを示せ。
- (5) 集積値がただ一つであっても収束しない実数列 a の例を挙げよ。

問 8-12B. 数列 $a = (a_n)_{n=0}^{\infty}$ に対し、単調増加な自然数列 (番号列) $n_0 < n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$ を用いて、 $(a_{n_k})_{k=0}^{\infty}$ で定まる数列を a の部分列という。Bolzano-Weierstrass の原理は次のようにも言い換えられる：

- R 内の有界な数列 $a = (a_n)_{n=0}^{\infty}$ には、収束部分列が存在する。

問 8-13B. 順序体 R における Archimedes の原理は次の各々と同値であることを示せ：

- (1) 自然数の全体 \mathbf{N} が R 内で上に有界でない。
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty$
(注：これは ε - δ 流でちゃんと書くと、 $\forall M \in R : \exists N \in \mathbf{N} : \forall n \in \mathbf{N} : n > N \implies n > M$ ということ (任意の R の元 M に対して然るべき \mathbf{N} の元 N の存在を主張) であるから、決して単なる同語反復的命題ではない。)
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

問 8-14B. 縮小区間列の原理では、各区間 $I_n = [a_n, b_n] = \{x \in \mathbf{R} \mid a_n \leq x \leq b_n\}$ が閉区間であることが重要である。実数の开区間の縮小列 $I_n = (a_n, b_n) = \{x \in \mathbf{R} \mid a_n < x < b_n\}$ で、 $\bigcap_{n \geq 0} I_n = \emptyset$ となる例を挙げよ。また、半开区間と呼ばれる $[a_n, b_n) = \{x \in \mathbf{R} \mid a_n \leq x < b_n\}$

(または、 $(a_n, b_n] = \{x \in \mathbf{R} \mid a_n < x \leq b_n\}$) の形の区間列ではどうか。

問 8-15B. 通常の十進小数表記で与えられた実数 $\alpha = d_0.d_1d_2d_3\dots$ ($d_0 \in \mathbf{Z}$ で $d_n \in \{0, 1, \dots, 9\}$ は小数第 n 位の数值、簡単のため $d_0 \geq 0$ と考えて良い) に対し、

- (1) 有理数 $a_n, b_n \in \mathbf{Q}$ を端点とする縮小区間列 $I_n = [a_n, b_n]$ で、 $\bigcap_{n \geq 0} I_n = \{\alpha\}$ となる

ものの例を挙げよ。

- (2) α に収束する有理 Cauchy 列 $a = (a_n)_{n=0}^{\infty}$ ($a_n \in \mathbf{Q}$) の例を挙げよ。

問 8-16D. Archimedes の原理が成立しない順序体の例を挙げよ。更にその中で、完備 (Cauchy 列が必ず収束する) な例を挙げよ。