

9. 関数の収束・極限・連続性

本節では、前節の公理を満たす順序体として実数全体の成す順序体 R を基礎づけた上で、 R 上で定義され R に値を取る関数 $f: R \rightarrow R$ に関する、収束・極限・連続性について考える。

関数の収束について以下で定義する：関数 $f: R \rightarrow R$ と $a \in R$ について、

- $x \rightarrow a$ のとき $f(x) \rightarrow \alpha$
 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in R : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - \alpha| < \varepsilon$
- $x \rightarrow a$ のとき $f(x) \rightarrow +\infty$
 $\Leftrightarrow \forall K \in R : \exists \delta > 0 : \forall x \in R : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > K$
- $f(x) \rightarrow -\infty$ も同様（しかるべく定式化せよ）

$x \rightarrow \pm\infty$ のときの極限も考える：

- $x \rightarrow +\infty$ のとき $f(x) \rightarrow \alpha$
 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists M \in R : \forall x \in R : x > M \Rightarrow |f(x) - \alpha| < \varepsilon$
- $x \rightarrow +\infty$ のとき $f(x) \rightarrow +\infty$
 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists M \in R : \forall x \in R : x > M \Rightarrow f(x) > \varepsilon$
- $f(x) \rightarrow -\infty$ および $x \rightarrow -\infty$ も同様（しかるべく定式化せよ）

関数の定義域は、しばしば R 全体ではなく、その一部 $I \subset R$ のみ（多くは適当な区間）のこともある。このとき、 I 上定義された実数値関数という。また、 R 全体で定義された関数を、 $I \subset R$ に制限して考えるときもある。

関数 f の有界性については次で定義する：

- f が I で有界 $\Leftrightarrow \exists C > 0 : \forall x \in I : |f(x)| < C$
- f が I で上に有界 $\Leftrightarrow \exists C \in R : \forall x \in I : f(x) < C$
- f が I で下に有界 $\Leftrightarrow \exists C \in R : \forall x \in I : f(x) > C$

関数 f の連続性については次で定義する：関数 $f: R \rightarrow R$ と $a \in R$ について、

- f が a で連続 $\Leftrightarrow x \rightarrow a$ のとき $f(x) \rightarrow f(a)$
 （ここだけ読むと高校で学んだ定義と同じだが、収束の次の基礎付けがあることに注意せよ。）
 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in R : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

関数 f が I 内の任意の $a \in I$ で連続のとき、 I で連続であるという。また、 R 全体（定義域全体）で連続のとき、単に連続であるという。

問9-1A. 関数 f と $a \in R$ について、「 $x \rightarrow a$ のとき $f(x) \rightarrow \alpha$ 」でない（ $x \rightarrow a$ で $f(x)$ が α に収束しない）ということ、論理式で記述せよ。「 $f(x) \rightarrow \pm\infty$ 」や「 $x \rightarrow \pm\infty$ のとき」についても、同様に否定命題を書いてみよ。

問9-2B. 関数 f が $x \rightarrow a$ で収束するとき、その極限值は一意であること（即ち、 $x \rightarrow a$ のとき $f(x) \rightarrow \alpha$ かつ $f(x) \rightarrow \beta$ ならば、 $\alpha = \beta$ ）を示せ。この一意に定まる極限値を $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ と書く。 $x \rightarrow \pm\infty$ の場合も同様。

（注：このとき、表記 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ は極限の「値」（一つの実数）を意味する。一つの実数なので、実数に対して定義された演算・大小比較・極限操作などが自在に出来る。一方、 $x \rightarrow a$ のとき $f(x) \rightarrow +\infty$ となる場合にも、 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ と書くこともある（多い）が、このときの左辺は値を表しているわけではなく、式全体で単に「 $x \rightarrow a$ のとき $f(x) \rightarrow +\infty$ 」である「こと」を表している便宜上の表記に過ぎない。実数値ではないので）

問9-3B. 関数 f, g について、 $x \rightarrow a$ のとき、 $f(x) \rightarrow \alpha, g(x) \rightarrow \beta$ ならば、 $f(x) + g(x) \rightarrow \alpha + \beta$ であることを示せ。

問9-4C. 関数 f, g について、 $x \rightarrow a$ のとき、 $f(x) \rightarrow \alpha, g(x) \rightarrow \beta$ ならば、 $f(x)g(x) \rightarrow \alpha\beta$ であることを示せ。

問9-5B. 関数 f について、 $x \rightarrow a$ のとき、 $f(x) \rightarrow \alpha$ かつ $\alpha > 0$ ならば、或る $\delta > 0$ が存在して、 $0 < |x - a| < \delta$ ならば $f(x) > 0$ であることを示せ。（このことを a の十分近くで $f(x) > 0$ とも言う。）

問 9-6C. 関数 f, g について、 $x \rightarrow a$ のとき、 $f(x) \rightarrow \alpha, g(x) \rightarrow \beta$ かつ $\beta \neq 0$ ならば、 $f(x)/g(x) \rightarrow \alpha/\beta$ であることを示せ。

問 9-7B. 上の何問かの $x \rightarrow \pm\infty$ 版を与えよ。

問 9-8B. 関数 f, g について、 $a \in \mathbf{R}$ で連続であれば、 $f(x) + g(x)$ も $a \in \mathbf{R}$ で連続であることを示せ。

問 9-9C. 関数 f, g について、 $a \in \mathbf{R}$ で連続であれば、 $f(x)g(x)$ も $a \in \mathbf{R}$ で連続であることを示せ。

問 9-10B. 関数 f について、 $a \in \mathbf{R}$ で連続かつ $f(a) > 0$ であれば、或る $\delta > 0$ が存在して、 $|x - a| < \delta$ ならば $f(x) > 0$ (a の十分近くで $f(x) > 0$) であることを示せ。

問 9-11C. 関数 f, g について、 $a \in \mathbf{R}$ で連続かつ $g(a) \neq 0$ であれば、 $f(x)/g(x)$ も $a \in \mathbf{R}$ で連続であることを示せ。

問 9-12B. 次の関数が連続であることを、(直接) 定義に順って示せ。

$$(1) f(x) = x \quad (2) f(x) = x^2 \quad (3) f(x) = \frac{1}{x} \quad (\text{但し, } x \neq 0 \text{ で})$$

問 9-13D. 関数 f と実数 $a, \alpha \in \mathbf{R}$ について、次は同値である：

$$(1) x \rightarrow a \text{ のとき, } f(x) \rightarrow \alpha$$

$$(2) x_n \rightarrow a \text{ となる任意の実数列 } x = (x_n)_{n=0}^{\infty} \text{ について, } f(x_n) \rightarrow \alpha$$

問 9-14C. $x \neq 0$ で定義された次の関数 f の $x \rightarrow 0$ での極限について吟味せよ。

$$(1) f(x) = \sin \frac{1}{x} \quad (2) f(x) = x \sin \frac{1}{x}$$

問 9-15B. 次で定まる関数 f は、任意の実数 $a \in \mathbf{R}$ で不連続であることを示せ。

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x \in \mathbf{Q}) \\ 0 & (x \notin \mathbf{Q}) \end{cases}$$

問 9-16D. 次で定まる関数 f の連続性について吟味せよ。

$$(1) f(x) = \begin{cases} x & (x \in \mathbf{Q}) \\ 0 & (x \notin \mathbf{Q}) \end{cases} \quad (2) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & (x = \frac{p}{q} \in \mathbf{Q}, p, q \in \mathbf{Z}, \text{互いに素}, q > 0) \\ 0 & (x \notin \mathbf{Q}) \end{cases}$$

問 9-17D. (中間値の定理) 有界閉区間 $I = [a, b] = \{x \in \mathbf{R} | a \leq x \leq b\}$ で連続な関数 f について、 $f(a) < 0, f(b) > 0$ ならば、 $f(c) = 0$ となる $c \in I$ が存在する。(注：前節で挙げた「実数の連続性の公理」が本質的に必要な定理である。同値な条件のうちのどれかの形を用いて示してみよ。)

問 9-18C. 中間値の定理を用いて、次を示せ： \mathbf{R} 上定義された連続関数 f について、 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ かつ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ならば、 $f(c) = 0$ となる $c \in \mathbf{R}$ が存在する。

問 9-19D. (最大値の定理) 有界閉区間 $I = [a, b] = \{x \in \mathbf{R} | a \leq x \leq b\}$ で連続な関数 f について、

(1) 値域 $f(I) := \{f(x) | x \in I\}$ は有界である。

(2) 値域 $f(I)$ には最大値・最小値が存在する。(値域 $f(I)$ が有界であるから、その上限・下限が存在するが、その値が値域に属する。即ち、或る $c \in I$ によって関数値 $f(c)$ として実現される。)

問 9-20C. 有界であっても閉でない定義域(例えば开区間 $(a, b) = \{x \in \mathbf{R} | a < x < b\}$) の上で定義された連続関数では、最大値の定理は成立するとは限らない。例を挙げよ。

期末試験について

- 期日：期末試験期間中に行なう(詳細は Loyola で確認のこと)
- 内容：授業で取り上げた内容のうちで、基本的な概念の理解や簡単な証明(適切な書き方も含む)について。期間中の演習課題も範囲に含まれる。授業時に講義した証明の難しい部分については試験で問うに適切な範囲を超えるが、それを理解しようと取り組んだことは、基本的な概念の理解や証明の書き方の練習となり、試験に臨む準備となるだろう。