

3 (本問では、実数全体の集合 \mathbf{R} は、従来素朴に知っているものとして考えてよい。)

- (1) \mathbf{R} の次の部分集合 X_i に対して、最大値・最小値・上限・下限がそれぞれ存在するか。存在するならその値を解答欄に記せ。存在しないなら「なし」と記せ。

\mathbf{R} の部分集合	最大値	最小値	上限	下限
$X_1 = [-2, 3)$ $= \{x \in \mathbf{R} \mid -2 \leq x < 3\}$				
$X_2 = (0, +\infty)$ $= \{x \in \mathbf{R} \mid x > 0\}$				
$X_3 = \left\{1 - \frac{1}{n} \mid n = 1, 2, 3, \dots\right\}$				
$X_4 = \left\{(-1)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right) \mid n = 1, 2, 3, \dots\right\}$				
$X_5 = \{x \in \mathbf{Q} \mid x^2 \leq 3\}$				
$X_6 = \{x \in \mathbf{Q} \mid x^3 \leq 5\}$				

- (2) 実数列 $\mathbf{a} = (a_n)_{n=0}^{\infty}$ が正の実数 $\alpha > 0$ に収束 ($\exists \alpha \in \mathbf{R} : a_n \rightarrow \alpha > 0$) するとき、
 $\exists c \in \mathbf{R} : \exists N \in \mathbf{N} : \forall n > N : a_n > c > 0$ となることを示せ。

(3) 実数列 $\mathbf{a} = (a_n)_{n=0}^{\infty}$, $\mathbf{b} = (b_n)_{n=0}^{\infty}$ について、 $a_n \rightarrow \alpha, b_n \rightarrow \beta$ ならば、 $a_n + b_n \rightarrow \alpha + \beta$ であることを示せ。