## 有限オートマトン（07/03 配布）

### （決定性）有限オートマトン $M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ の形式的定義

- $Q$：有限集合 $\cdots$ 状態の集合
- $\Sigma$：有限集合 $\cdots$ 入力文字の集合（“alphabet”）
- $\delta : Q \times \Sigma \longrightarrow Q$：遷移関数
- $s \in Q$ $\cdots$ 初期状態
- $F \subset Q$ $\cdots$ 受理状態の集合

### （決定性）有限オートマトンによる語の受理

有限オートマトン $M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ が語 $w = a_1 a_2 \cdots a_n \in \Sigma^*$ を受理 (accept) する
$\Longleftrightarrow \exists r_0, r_1, \ldots, r_n \in Q$ :

- $r_0 = s$
- $\delta(r_{i-1}, a_i) = r_i$ $(i = 1, \ldots, n)$
- $r_n \in F$

### 非決定性有限オートマトン $M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ の形式的定義

- $Q$：有限集合 $\cdots$ 状態の集合
- $\Sigma$：有限集合 $\cdots$ alphabet,　$\Sigma_\varepsilon := \Sigma \cup \{\varepsilon\}$
- $\delta : Q \times \Sigma_\varepsilon \longrightarrow \mathcal{P}(Q)$：遷移関数　$\cdots$ 可能な遷移先全体の集合
  （$\mathcal{P}(Q)$ は $Q$ の冪集合）
- $s \in Q$ $\cdots$ 初期状態
- $F \subset Q$ $\cdots$ 受理状態の集合

### 非決定性有限オートマトンによる語の受理

非決定性有限オートマトン $M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ が語 $w \in \Sigma^*$ を受理する
$\Longleftrightarrow \exists a_1, a_2, \cdots, a_n \in \Sigma_\varepsilon, \exists r_0, r_1, \ldots, r_n \in Q$ :

- $w = a_1 a_2 \cdots a_n$
- $r_0 = s$
- $r_i \in \delta(r_{i-1}, a_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$
- $r_n \in F$

### 決定性有限オートマトンと非決定性有限オートマトンとの同等性

与えられた非決定性有限オートマトン $M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ に対し、$M$ が認識する言語 $L(M)$ を認識する決定性有限オートマトン $\widetilde{M} := (\widetilde{Q}, \Sigma, \widetilde{\delta}, \widetilde{s}, \widetilde{F})$ が次で構成できる：
まず、各状態 $q \in Q$ に対し、$E(q) \subset Q$ を次で定める：

$$E_0(q) := \{q\}, \quad E_{i+1}(q) := \bigcup_{r \in E_i(q)} \delta(r, \varepsilon), \quad E(q) := \bigcup_{i \geq 0} E_i(q)$$

（$E(q)$ は状態 $q$ から入力を何も読まずに遷移できる状態全体）

- $\widetilde{Q} := \mathcal{P}(Q)$：現在あり得る状態全体の集合
- $\widetilde{\delta} : \widetilde{Q} \times \Sigma \longrightarrow \widetilde{Q}$　：$\widetilde{q}$ の何処かから入力 $x$ で遷移できる状態全体

$$(\widetilde{q}, x) \longmapsto \widetilde{\delta}(\widetilde{q}, x) := \bigcup_{q \in \widetilde{q}} \left( \bigcup_{r \in \delta(q, x)} E(r) \right)$$

- $\widetilde{s} := E(s)$
- $\widetilde{F} := \{\widetilde{q} \in \widetilde{Q} \mid \widetilde{q} \cap F \neq \emptyset\}$ ：あり得る状態のどれかが受理状態

## 正規言語に対する Pumping Lemma（注入補題・反復補題）

正規言語 $A$ に対し、

$\exists n \in \boldsymbol{N} : \forall w \in A, |w| \geq n : \exists x, y, z \in \Sigma^*, w = xyz$ s.t.

(1) $y \neq \varepsilon$
(2) $|xy| \leq n$
(3) $\forall k \geq 0 : xy^k z \in A$

## 非決定性プッシュダウンオートマトン $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, F)$ の形式的定義

- $Q$：有限集合 $\cdots$ 状態の集合
- $\Sigma$：有限集合 $\cdots$ alphabet, $\Sigma_\varepsilon := \Sigma \cup \{\varepsilon\}$
- $\Gamma$：有限集合 $\cdots$ stack alphabet, $\Gamma_\varepsilon := \Gamma \cup \{\varepsilon\}$
- $\delta : Q \times \Sigma_\varepsilon \times \Gamma_\varepsilon \longrightarrow \mathcal{P}(Q \times \Gamma_\varepsilon)$：遷移関数（非決定的）　$\cdots$ 可能な遷移先全体の集合
- $s \in Q$ $\cdots$ 初期状態
- $F \subset Q$ $\cdots$ 受理状態の集合

## 生成文法における Chomsky の標準形

- 正規言語の生成規則は次の形に出来る
  - $\star$ $X \longrightarrow xY \ (X, Y \in V, x \in \Sigma)$
  - $\star$ $X \longrightarrow x \ (X \in V, x \in \Sigma_\varepsilon)$
- 文脈自由言語の生成規則は次の形に出来る
  - $\star$ $X \longrightarrow YZ \ (X, Y, Z \in V)$
  - $\star$ $X \longrightarrow x \ (X \in V, x \in \Sigma_\varepsilon)$

## 文脈自由言語に対する Pumping Lemma

文脈自由言語 $A$ に対し、

$\exists n \in \boldsymbol{N} : \forall w \in A, |w| \geq n : \exists u, v, x, y, z \in \Sigma^* : w = uvxyz$ s.t.

(1) $vy \neq \varepsilon$
(2) $|vxy| \leq n$
(3) $\forall k \geq 0 : uv^k xy^k z \in A$