有限オートマトンでの計算可能性問題

- 言語 $A \subset \Sigma^*$ に対し、
  A を認識する有限オートマトン M
  が存在するか？

- 有限オートマトンによって
  認識可能な言語はどのようなものか？

定理：

L：正規言語

$\Updownarrow$

L が或る有限オートマトンで認識される

定理：

$$L\text{：正規言語}$$
$$\Updownarrow$$
$$L\text{ が或る有限オートマトンで認識される}$$

このような一般論を考えるには、
有限オートマトンの概念を
少し一般化する方が良い

$\cdots$ **非決定性**有限オートマトン
(Non-deterministic finite automaton)

定理：

L：正規言語

$\Updownarrow$

L が或る非決定性有限オートマトンで認識される

これは比較的容易

正規言語の帰納的定義に沿って構成

正規言語を認識する NFA の構成

正規言語：

- $L(\emptyset) = \emptyset$
- $L(\varepsilon) = \{\varepsilon\}$
- $L(a) = \{a\}$
- $L(R \cup S) = L(R) \cup L(S)$
- $L(R \circ S) = L(R) \circ L(S)$
- $L(R^*) = L(R)^*$

(1) 言語 $L(\emptyset), L(\varepsilon), L(a)$ を認識する NFA を構成
(2) 言語 A, B を認識する NFA から、
言語 $A \cup B, A \circ B, A^*$ を認識する NFA を構成

DFA と NFA との同等性

> **定理：**
> L が或る（決定性）有限オートマトンで認識される
> $$\Updownarrow$$
> L が或る非決定性有限オートマトンで認識される

非決定性有限オートマトン M に対し、

$\mathrm{L(M)}$ を認識する決定性有限オートマトン $\widetilde{\mathrm{M}}$ が構成できる

DFA と NFA との同等性

非決定性有限オートマトン

$M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ **に対し、**

$L(M)$ **を認識する決定性有限オートマトン**

$\widetilde{M} = (\widetilde{Q}, \Sigma, \widetilde{\delta}, \widetilde{s}, \widetilde{F})$ **を構成**

アイデア：

非決定性モデルでも決定的に定まるものは何か？

DFA と NFA との同等性

定理：

L：正規言語

$\Updownarrow$

L が或る（決定性）有限オートマトンで認識される

$\Updownarrow$

L が或る（非決定性）有限オートマトンで認識される

有限オートマトンでの計算可能性問題

- 言語 $A \subset \Sigma^*$ に対し、
  A を認識する有限オートマトン M
  が存在するか？

- 有限オートマトンによって
  認識可能な言語はどのようなものか？

定理：

L：正規言語

$\Updownarrow$

L が或る有限オートマトンで認識される

有限オートマトンでの計算可能性問題

- 言語 $A \subset \Sigma^*$ に対し、
  A を認識する有限オートマトン M
  が存在するか？

- 有限オートマトンによって
  認識可能な言語はどのようなものか？

$\longrightarrow$ 正規言語・正規表現

有限オートマトンで認識できない言語が存在する !!
（$\Longleftrightarrow$ 正規でない言語が存在する）

有限オートマトンでの計算可能性問題

- 言語 $A \subset \Sigma^*$ に対し、
  A を認識する有限オートマトン M
  が存在するか？

- 有限オートマトンによって
  認識可能な言語はどのようなものか？

$\longrightarrow$ 正規言語・正規表現

有限オートマトンで認識できない言語が存在する !!
（$\Longleftrightarrow$ 正規でない言語が存在する）

集合・写像などの言葉を用いて記述する練習

演習問題：Σ を alphabet とする。以下を記述せよ。

(1) L **：言語**

(a) **文字 $a \in \Sigma$ に対し、語に左（resp. 右）から文字 a を連接させる写像 ℓ_a (resp. r_a)**

(b) **語 $w \in \Sigma^*$ に対し、語に左（resp. 右）から文字列 w を連接させる写像 ℓ_w (resp. r_w)（語の長さ $|w|$ に関する帰納的定義で）**

(c) **語 $w \in \Sigma^*$ の後に連接すると L の元になる語全体の成す集合 $S_\mathrm{L}(w)$ を与える写像 S_L**

(2) $M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ **：有限オートマトン**

(a) **状態** $q \in Q$ **にいる所から出発して語** $w \in \Sigma^*$ **を読んだ後の状態** $\widetilde{\delta}(q, w)$ **を与える写像** $\widetilde{\delta}$ **（語の長さ** $|w|$ **に関する帰納的定義で）**

(b) **特に、**M **が語** $w \in \Sigma^*$ **を読んだ後の状態を与える写像** $\widetilde{\delta}_0$

(c) M **が認識する言語** $L(M)$

(d) **状態** $q \in Q$ **にいる所から出発して、その後に読めば受理される語全体の成す集合** $\varphi_M(q)$ **を与える写像** φ_M

有限オートマトンでの計算可能性問題

有限オートマトンで認識できる

$\Longleftrightarrow$ **“待ち” が有限種類**

$$\ell_w : \Sigma^* \longrightarrow \Sigma^* \quad$$ **：“左平行移動”**

$$v \longmapsto wv$$

言語 $L \in \mathcal{P}(\Sigma^*)$ **に対し、**

$S_L : \Sigma^* \longrightarrow \mathcal{P}(\Sigma^*)$ **：“待ち” の集合**

$$w \longmapsto \{v \in \Sigma^* \mid wv \in L\} = \ell_w^{-1}(L)$$

$$\#\mathrm{Im}S_L < \infty \Longleftrightarrow \exists M : L = L(M)$$

有限オートマトンでの計算可能性問題

有限オートマトンで認識できる

$$\Longleftrightarrow$$ **"待ち" が有限種類**

$\ell_w : \Sigma^* \longrightarrow \Sigma^*$ **："左平行移動"**

$$v \longmapsto wv$$

言語 $L \in \mathcal{P}(\Sigma^*)$ **に対し、**
$S_L : \Sigma^* \longrightarrow \mathcal{P}(\Sigma^*)$ **："待ち" の集合**

$$w \longmapsto \{v \in \Sigma^* \,|\, wv \in L\} = \ell_w^{-1}(L)$$

$$\#\mathrm{Im} S_L < \infty \Longleftrightarrow \exists M : L = L(M)$$