2. 不等式による評価・Taylor 展開 (04/27)

前回（まで）の問題を授業開始前に板書してあれば、授業冒頭で添削・解説を行なう。板書発表時は、学生番号・氏名を付記すること。授業参画の評価に含める。意欲的・積極的な参画を望む。

授業では A を付した問題を例題として解説する。その後、他の問題に取り組むこと。授業終了時の提出課題は B を付した問題 $+\alpha$ である。問題は一旦各自のノートに解き、その後に配布する答案用紙に清書して提出することとする。C,D を付した問題は次回の板書に向けての課題とする。中でも D を付した問題は力試し的な問題である。

2-1A. $|x| < 2, |y| < 3$ のとき、$|4x + y| < 11$ であることを示せ。

2-2B. $|x| < 2, |y| < 3, |z| < 4$ のとき、$|xy - z| < c$ となる（なるべく小さい）c は？

2-3A. 関数の連続性の ε-δ 流の定義について、

(1) 「関数 f が $x = a$ で連続である」ということを、論理記号を交えて記述せよ。

(2) 「関数 f が $x = a$ で連続でない」ということを、論理記号を交えて記述せよ。

2-4B. 関数 $f(x) = x^2$ が、任意の実数 a に対して $x = a$ で連続であることを証明したい。

(1) 関数 f が $x = a$ で連続であることを示すには何を示せば良いか。論理記号を交えて記述せよ。

(2) そのことを証明せよ。証明の形式は次に順うと良い。

> $\forall\varepsilon > 0$ を取る。
> $\delta = \boxed{\quad ? \quad}$ と取ると、
> $|h| < \delta$ に対し、
>
> $\cdots$
> $|f(a + h) - f(a)| < \varepsilon$ を示す
> $\cdots$
>
> 従って、$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ となり、f は $x = a$ で連続。

2-5A. $\lim_{x\to a} f(x) = b, \lim_{x\to a} g(x) = c$ のとき、$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = b+c$ となることを示せ。

2-6B. 前問の状況で、$\lim_{x\to a}(f(x) - g(x)) = b - c$ となることを示せ。

2-7C. 前問の状況で、$\lim_{x\to a}(f(x)g(x)) = bc$ となることを示せ。

2-8C. 関数 f が $x = a$ で連続で、かつ $f(a) > 0$ であるとする。このとき、或る $\varepsilon > 0$ と $c > 0$ とが存在して、$|x - a| < \varepsilon$ のとき $f(x) > c > 0$ となることを示せ。

2-9D. 前問の状況で、$\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{f(a)}$ （即ち、$\frac{1}{f(x)}$ も $x = a$ で連続）となることを示せ。（ヒント：評価の中で前問を用いる。）

2-10A. $f(x) = e^{-x}$ の Taylor 展開 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ について、

(1) f の n 階導関数 $f^{(n)}$ を求め、$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ によって $f(x)$ の Taylor 展開を求めよ。

(2) e^x の Taylor 展開と比較せよ。（これより e^x の Taylor 展開から e^{-x} の Taylor 展開が得られることが分かる。通常はこうして求めれば良い。）

(3) 極限 $\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x} - 1 + x}{x^2}$ を求めよ。

2-11B. $f(x) = e^{2x}$ について、

(1) Taylor 展開を求めよ。

(2) 極限 $\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} - 1 - 2x}{x^2}$ を求めよ。

2-12C. $f(x) = (1 - x)e^x$ について、

(1) Taylor 展開を求めよ。

(2) 極限 $\lim_{x\to 0} \frac{(1 - x)e^x - 1}{x^2}$ を求めよ。