

4. 級数和の収束と発散・TAYLOR 展開の剰余項の評価 (06/01)

4-20A. 次の級数の収束・発散を判定せよ。

$$(1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-1}{n^2+n+2017} \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+2017}{n^2} \quad (3) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{2017}}{2^n}$$

4-21B. 次の級数の収束・発散を判定せよ。

$$(1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n}+1} \quad (2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2017}{n^3} \quad (3) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+2017}{3^n}$$

(結果のみでも良いが、その場合は、次の例のような級数のうち、どのような級数と収束・発散を共にするとして判定したかを明記せよ。

$$\text{例: } \sum \frac{1}{n}, \quad \sum \frac{1}{n^{1.5}}, \quad \sum \frac{1}{n^2}, \quad \sum \frac{1}{n^3}, \quad \sum \frac{1}{2^n}, \quad \sum \frac{1}{3^n}, \quad \sum \left(\frac{2}{3}\right)^n \text{ など}$$

4-22A. 次の関数 f の Taylor 展開について、その収束半径 r を求めよ。また、 $|x|=r$ で関数 f に何が起きているか？

$$(1) f(x) = \frac{1}{3-x} \quad (2) f(x) = \frac{1}{1+x-12x^2} \quad (3) f(x) = \log(1-2x)$$

4-23B. 次の冪級数の収束半径を求めよ。

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n5^n} \quad (2) \sum_{n=0}^{\infty} n3^n x^n \quad (3) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!} x^n$$

4-24C. 次の関数 f の Taylor 展開について、その収束半径 r を求めよ。また、 $|x|=r$ で関数 f に何が起きているか？

$$(1) f(x) = \frac{1}{1-2x} \quad (2) f(x) = \frac{1}{x^2-x-12} \quad (3) f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

4-25B. 以前の授業の演習課題で、 $\sin 1$ の近似値を Taylor 展開を利用して求めたが、その際は特に誤差評価を行わなかった。ここでは Taylor の定理による剰余項の評価を用いて、誤差の評価をしてみよう。

(必要なら、裏面にある $n!, 1/n!$ の表を利用せよ。)

$f(x) = \sin x$ の Taylor 展開の剰余項 $R_N(f; x)$ について、

- (1) $|R_N(f; 1)| < 10^{-7}$ となる (出来ればなるべく小さい) N を与えよ。
- (2) $\sin 1$ の近似値を小数第 6 位まで求めよ。
- (3) 誤差が 10^{-6} 以下であることを保証せよ。但し、各項の四捨五入による誤差 (丸め誤差)・剰余項を無視したことによる誤差 (打切誤差) の双方を考慮に入れよ。

(意欲のある人はもう一桁多く小数第 7 位まで求めてみよ。その場合、(1) に当たる部分はどうすれば良いか。)

以下の数問は、 ε - δ 流の数列の収束・極限の証明の練習。

4-26B. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$ のとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \alpha + \beta$ となることを示せ。

4-27C. 前問の状況で、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \alpha \beta$ となることを示せ。

4-28C. 数列 $a = (a_n)_{n=0}^{\infty}$ について、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha > 0$ であるとき、或る自然数 $N \in \mathbb{N}$ と正の実数 $c > 0$ とが存在して、 $n \geq N$ となる任意の自然数 n に対し $a_n > c > 0$ となることを示せ。

4-29D. 前問の状況で、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\alpha}$ となることを示せ。(ヒント: 評価の中で前問を用いる。)

4-30D. 各項 a_n が正 ($a_n > 0$) である数列 $a = (a_n)_{n=0}^{\infty}$ について、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ であるとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{\alpha}$ となることを示せ。

4-31C. 級数 $S = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$ の収束・発散を判定したい。

(1) $(\log \log x)' = ?$

(2) 関数 $\frac{1}{x \log x}$ の積分と級数 S との比較により、級数 S の収束・発散を判定せよ。

4-32C. 級数 $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ について、部分和を $S_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2}$ とおく。

(1) 積分 $\int_1^N \frac{1}{x^2} dx$ を用いて S_N を上から評価することにより、級数 S が収束することを示せ。

(2) $n \geq 2$ に対して $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$ であることを用いて、 S_N を上から評価することにより、級数 S が収束することを示せ。

以下、電卓等利用可。近似値の計算では、少なくとも打切誤差の評価（収束の速さ）については考慮せよ。

4-33C. $f(x) = \log(1+x)$ の Taylor 展開を用いて、 \log の値の近似値を求めることを考えよう。

(1) $\log 1.1$ の近似値を求めよ。

(2) $\log 1.21$ の近似値を求めよ。（直接 $x = 0.21$ とおくのと、 $\log 1.21 = \log(1.1)^2 = 2 \log 1.1$ を利用するのと、どちらが有利か。）

(3) 直接 $x = 2$ とおいて $\log 3$ の近似値を求めることはできない。何故か？

4-34C. $\log 3$ の近似値を求めるために、次のことを考えよう。

(1) $\log \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$ の Taylor 展開を求めよ。

(2) これを利用して、 $\log 3$ の近似値を求めよ。

n	$n!$	$1/n!$
0	1	1
1	1	1
2	2	0.5
3	6	0.166666666667
4	24	0.041666666667
5	120	0.00833333333333
6	720	0.001388888889
7	5040	0.000198412698
8	40320	0.000024801587
9	362880	0.000002755732
10	3628800	0.000000275573
11	39916800	0.000000025052
12	479001600	0.000000002088
13	6227020800	0.000000000161
14	87178291200	0.000000000011