有界閉区間 $I=[a,b]$ で定義された有界な関数 f に対し、定積分 $\displaystyle\int_I f(x)dx=\int_a^b f(x)dx$ を次で定義する：

- 区間 I の分割 $\Delta : a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$ に対し、
  - ⋆ $I_i:=[x_{i-1},x_i]$：各小区間、$|I_i|:=x_i-x_{i-1}$：区間幅
  - ⋆ $m_i:=\inf\limits_{x\in I_i} f(x), M_i:=\sup\limits_{x\in I_i} f(x)$ ：区間 I_i に於ける f の下限・上限
  - ⋆ $s_\Delta:=\displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_i|I_i|, S_\Delta:=\sum_{i=1}^{n} M_i|I_i|$ ：分割 Δ に関する上下からの見積もり
- $s:=\sup\limits_{\Delta} s_\Delta$：下積分、$S:=\inf\limits_{\Delta} S_\Delta$：上積分
- $s=S$ のとき、f は I で積分可能といい、$s=S=:\displaystyle\int_I f(x)dx$ と書く。

6-43A.　閉区間 $I=[0,2]$ で定義された関数

$$f(x)=\begin{cases}1 & (x=1\text{ のとき})\\ 0 & (\text{それ以外})\end{cases}$$

を考える。区間 I の分割 $\Delta : 0=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=2$ に対し、各 I_i は $f(x)=0$ となる点 $x\in I_i$ を含むので、$m_i=0$ であり、従って、$s_\Delta=0$ である。これより、下積分は $s=0$ である。一方、$x=1$ を含む小区間 $I_k=[x_{k-1},x_k]$ については、$M_k=1>0$ であり、従って、$S_\Delta=|I_k|>0$ である。f が I で積分可能であることを言うには、上積分 $S=0$ であること、即ち、任意の $\varepsilon>0$ に対し、$S_\Delta\le\varepsilon$ なる分割 Δ が存在することを言わなくてはならない。

与えられた任意の $\varepsilon>0$ に対し、$S_\Delta\le\varepsilon$ なる分割 $\Delta=\Delta_\varepsilon$ を実際に与えることによって、このことを示せ。

6-44B.　$I=[0,3]$ で定義された関数

$$f(x)=\begin{cases}1 & (x=1\text{ のとき})\\ 2 & (x=2\text{ のとき})\\ 0 & (\text{それ以外})\end{cases}$$

を考える。上問と同様に、与えられた任意の $\varepsilon>0$ に対し、$S_\Delta\le\varepsilon$ なる分割 $\Delta=\Delta_\varepsilon$ を具体的に与えることによって、f が I で積分可能であることを示せ。

6-45C.　m を 1 以上の整数とする。$I=[0,1]$ で定義された関数

$$f(x)=\begin{cases}1 & \left(x=\dfrac{k}{m}\ (k=1,2,\ldots,m-1)\text{ のとき}\right)\\ 0 & (\text{それ以外})\end{cases}$$

について、上問と同様にして、f が I で積分可能であることを示せ。

6-46D.　次で定める $I=[0,1]$ 上の関数 f は、I で積分可能であるか？

$$f(x)=\begin{cases}1 & \left(x=\dfrac{1}{n}\ (n\text{：正整数})\text{ のとき}\right)\\ 0 & (\text{それ以外}).\end{cases}$$

6-47A.　$a<c<b$ とし、閉区間 $[a,b]$ で定義された関数 f について、f は $[a,b]$ で有界であるとする。従って、$[a,c],[c,b]$ でも有界であり、それぞれの区間における下積分が存在する。区間を明示して、$[a,b]$ (resp. $[a,c],[c,b]$) における f の下積分を $s(a,b)$ (resp. $s(a,c),s(c,b)$) と書くことにする。$s(a,b)=s(a,c)+s(c,b)$ であることを示したい。それには、$s(a,b)$ の定義により、$s(a,c)+s(c,b)$ が $X:=\{s_\Delta|\Delta\text{：}[a,b]\text{ の分割}\}$ の上限（最小上界）であることを示せば良い。

(1) $s(a,c)+s(c,b)$ が X の上界であること、即ち、$[a,b]$ の任意の分割 Δ に対し、$s(a,c)+s(c,b)\geq s_\Delta$ であることを示せ。（ヒント：必要なら c を分点に加えた分割 $\widetilde{\Delta}$ を考え、それが定める $[a,c],[c,b]$ の分割をそれぞれ Δ_1,Δ_2 とする。$s_{\Delta_1}+s_{\Delta_2}=s_{\widetilde{\Delta}}\geq s_\Delta$ であることと、$s(a,c),s(c,b)$ の上界性を用いよ。）

(2) $s(a,c)+s(c,b)$ が X の上界のうち最小であること、即ち、任意の $\varepsilon>0$ に対し、$s(a,c)+s(c,b)-\varepsilon$ が X の上界でないことを示せ。（ヒント：$[a,b]$ の分割 Δ で $s_\Delta>s(a,c)+s(c,b)-\varepsilon$ となるものの存在を示す。$s(a,c),s(c,b)$ の上界としての最小性を用いよ。）

6-48B.　上問の状況で、同様にして、上積分についての等式 $S(a,b)=S(a,c)+S(c,b)$ であることを示せ。即ち、$Y:=\{S_\Delta|\Delta:[a,b]\text{ の分割}\}$ とするとき、

(1) $S(a,c)+S(c,b)$ が Y の下界であることを示せ。

(2) $S(a,c)+S(c,b)$ が Y の下界のうち最大であることを示せ。

6-49C.　上2問を用いて、f が $[a,c],[c,b]$ で共に積分可能であることと、f が $[a,b]$ で積分可能であることとが同値であることを示せ。

6-50C.　有界閉区間 $I=[a,b]$ で定義された有界な関数 f,g が、$\forall x\in I: f(x)\leq g(x)$ を満たすとする。

(1) $\inf\limits_{x\in I}f(x)\leq\inf\limits_{x\in I}g(x)$ であることを示せ。（ヒント：$\inf\limits_{x\in I}f(x)$ が $g(x)$ の下界であることを示せば、下界の中での $\inf\limits_{x\in I}g(x)$ の最大性から従う。）

(2) 区間 I の分割 $\Delta: a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$ に対し、f,g に対して上問のように定めた s_Δ を、関数を明記してそれぞれ $s_\Delta(f),s_\Delta(g)$ と書くことにする。このとき、$s_\Delta(f)\leq s_\Delta(g)$ であることを示せ。（ヒント：各小区間 $I_i=[x_{i-1},x_i]$ について、前小問を適用せよ。）

(3) 各関数の下積分 $s(f),s(g)$ について、$s(f)\leq s(g)$ であることを示せ。（ヒント：$s(g)$ が $s_\Delta(f)$ の上界であることを示せば、上界の中での $s(f)$ の最小性から従う。）

(4) f,g が共に I で積分可能であれば、$\displaystyle\int_I f(x)dx\leq\int_I g(x)dx$ であることを示せ。（ヒント：上積分についても同様に考えて、併せよ。）

以下の問題では、微分積分学の基本定理を用いて、「不定積分＝原始関数」「定積分＝原始関数の区間両端での値の差」として（即ち、今までに馴染みの計算法に従って）考えて良い。

6-51A.　整数 $m,n\in\boldsymbol{Z}$ に対し、$\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos mx\cos nx\,dx$ を求めよ。

6-52B.　整数 $m,n\in\boldsymbol{Z}$ に対し、$\displaystyle\int_0^{2\pi}\sin mx\sin nx\,dx,\int_0^{2\pi}\cos mx\sin nx\,dx$ を求めよ。

6-53A.　次の極限は？

(1) $\displaystyle\lim_{M\to+\infty}\int_1^M\frac{1}{\sqrt{x}}dx$　　(2) $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1\frac{1}{\sqrt{x}}dx$

6-54B.　次の極限は？

(1) $\displaystyle\lim_{M\to+\infty}\int_1^M\frac{1}{x^2}dx$　　(2) $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1\frac{1}{x^2}dx$

6-55B.　次の極限は？

(1) $\displaystyle\lim_{M\to+\infty}\int_0^M e^{-x}dx$　　(2) $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1\log x dx$

（(2) のヒント：$\lim\limits_{x\to+0}x\log x=0$ を用いよ。）

6-56C.

$$I_k(M):=\int_0^M x^k e^{-x}dx$$

とおく。$I_k(M)$ の k に関する漸化式を求め、極限 $\lim\limits_{M\to+\infty}I_k(M)$ が収束することを、k に関する帰納法で示せ。また、極限値 $I_k:=\lim\limits_{M\to+\infty}I_k(M)$ に関する漸化式を求めよ。