7-46A.　次の広義積分の収束・発散を判定せよ。

(1) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x-1}{x^2+x+1}dx$　(2) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2+1}dx$　(3) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x^{2017}}{e^x}dx$　(4) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{x}+1}{x}dx$

7-47B.　次の広義積分の収束・発散を判定せよ。

(1) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x+\sqrt{x}+1}dx$　(2) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x+2017}{x\sqrt{x}}dx$　(3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x+2017}{x\sqrt{x}}dx$

（結果のみでも良いが、その場合は、次の例のような広義積分のうち、どのような広義積分と収束・発散を共にするとして判定したかを明記せよ。

例：$\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx,\quad \int \frac{1}{x}dx,\quad \int \frac{1}{x\sqrt{x}}dx,\quad \int \frac{1}{x^2}dx,\quad \int \frac{1}{x^3}dx,\quad \int \frac{1}{e^x}dx$　など）

7-48B.　有理関数

$$f(x)=\frac{7x^2+6x-5}{(x-1)^2(x^2+2x+5)}$$

の不定積分を計算したい。

(1) $\displaystyle f(x)=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{(x-1)^2}+\frac{cx+d}{x^2+2x+5}$ を満たす定数 a,b,c,d を求めよ。

(2) それぞれの項の不定積分を計算して、$\displaystyle\int f(x)dx$ を求めよ。

7-49C.　$\displaystyle I_n=\int\frac{dx}{(1+x^2)^n}$ $(n=0,1,2,\ldots)$ が満たす漸化式を求めよう。（以下、I_n は不定積分なので、定数の差は気にしなくてよい。）

(1) $1+x^2=t$ と置換することにより、$\displaystyle\int\frac{x}{(1+x^2)^n}dx$ を求めよ。

(2) $\displaystyle\frac{1}{(1+x^2)^n}-\frac{1}{(1+x^2)^{n+1}}=\frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}}=x\frac{x}{(1+x^2)^{n+1}}$ と見て部分積分することにより、I_n-I_{n+1} を I_n で表し、I_n, I_{n+1} の関係式を求めよ。

7-50B.　次の不定積分を、有理関数の積分に帰着せよ。

(1) $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x-4x^2}}{2+x}dx$ （ヒント：$y=\sqrt{x-4x^2}$ とおくと、$y^2=x-4x^2$ となり、これは楕円 C の方程式である。C 上に分かり易い点 P（例えば $(0,0)$）を取り、P を通り傾き t の直線 ℓ を考える。C と ℓ との交点のうちで P と異なる点を $Q(x,y)$ とすると、Q の座標 x,y はともに t の有理式で書ける。この変数変換を用いると、有理関数の積分に変換できる。）

(2) $\displaystyle\int\frac{\sin x}{1+\sin x+\cos x}dx$ （ヒント：$t=\tan\dfrac{x}{2}$ とおく。）

7-51B.　次の不定積分を求めよ。（変数変換する前の変数 x で表すのが本来だが、面倒なら変数変換した後の変数で表した状態でも良い。）

(1) $\displaystyle\int\frac{1}{1+\sqrt[5]{x+1}}\,dx$ （ヒント：$t=\sqrt[5]{x+1}$ とおく。）

(2) $\displaystyle\int\sqrt{1+x^2}\,dx$ （ヒント：$x=\tan\theta$ とおくのが素直と思われるが、$t=x+\sqrt{1+x^2}$ とおく手法もある。）

(3) $\displaystyle\int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx$ （ヒント：有理関数の積分に帰着する変数変換はいろいろ考えられるが、ここでは $x=\sin\theta$ とおくのが簡明か。）