3. 数列・級数の収束性

3–1. **ε-δ 式の数列の極限・級数の和の定式化.** 数列 $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n=0}^{\infty}$ に対し、

- $n \longrightarrow \infty$ のとき $a_n \longrightarrow \alpha$ （a_n が α に**収束 (converge)** する, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$）
  $\overset{\leftarrow}{\iff} \forall\varepsilon > 0 : \exists N \in \boldsymbol{N} : \forall n \in \boldsymbol{N} : n \geq N \Longrightarrow |a_n - \alpha| < \varepsilon$
- 数列・級数が収束しない時は全て**発散**というが、特に、
  $n \longrightarrow \infty$ のとき $a_n \longrightarrow +\infty$ （a_n が**正の無限大に発散**する, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$）
  $\overset{\leftarrow}{\iff} \forall M \in \boldsymbol{R} : \exists N \in \boldsymbol{N} : \forall n \in \boldsymbol{N} : n \geq N \Longrightarrow a_n > M$
  （**負の無限大に発散**、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ も同様）
- 級数の和 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \alpha$ (resp. $\pm\infty$)
  $\overset{\leftarrow}{\iff}$ 部分和 $s_n := \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$ の成す数列 $\boldsymbol{s} = (s_n)$ について、$s_n \longrightarrow \alpha$ (resp. $\pm\infty$)

3–2. **絶対収束.**

- （上に）有界な単調増加数列はその上限に収束する。
  - ⋆ 数列 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ が**上に有界** $\overset{\leftarrow}{\iff} \exists M \in \boldsymbol{R} : \forall n \in \boldsymbol{N} : a_n \leq M$
  - ⋆ 上に有界な数列 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ の**上限**（最小上界）$\sup a_n := \min\{M | \forall N : a_n \leq M\}$
    （即ち、$\forall N : a_n \leq M_0$ かつ $\forall\varepsilon > 0 : \exists N : a_n > M_0 - \varepsilon$ となる M_0 のこと）
- 正項級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ はその部分和が（上に）有界ならその上限に収束する。項の順番を入れ換えても、収束性や極限値は変わらない（同じ値に収束）。
- 絶対収束する級数は収束する。項の順番を入れ換えても、収束性や極限値は変わらない（同じ値に収束）。
  - ⋆ 級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が**絶対収束** $\overset{\leftarrow}{\iff}$ 級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ が収束
- 収束するが絶対収束しない級数（条件収束）では、項の順番を入れ換えると、（正負の無限大を含めて）任意の値に収束し得る。
- 交替級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ （n：偶数の時 $a_n > 0$、n：奇数の時 $a_n < 0$）は、$a_n \longrightarrow 0$ なら収束する（絶対収束するとは限らない）。

3–3. **級数の収束性判定.** 正項級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ について

- 比較判定法：既知の正項級数 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ と比較して
  - ⋆ 有限個の n を除いて $a_n \leq b_n$ で $\sum b_n$：収束 $\Longrightarrow \sum a_n$：収束
  - ⋆ 有限個の n を除いて $a_n \geq b_n$ で $\sum b_n$：発散 $\Longrightarrow \sum a_n$：発散

  注：上記の判定法で、
  - ⋆ 途中からでも良い（$\exists N : \forall n \geq N : a_n \leq b_n$ などでも可）
  - ⋆ 定数倍しても良い（$\exists C > 0 : a_n \leq C b_n$ などでも可）
- d'Alembert の判定法（比テスト）：
  - ⋆ （$\exists r < 1 :$ 有限個の n を除いて$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq r$）$\Longrightarrow \sum a_n$：収束
  - ⋆ $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \longrightarrow r (n \longrightarrow \infty)$ のとき、
    $r < 1 \Longrightarrow \sum a_n$：収束,　　$r > 1 \Longrightarrow \sum a_n$：発散
- Cauchy の判定法（n 乗根テスト）：
  - ⋆ （$\exists r < 1 :$ 有限個の n を除いて$\sqrt[n]{a_n} \leq r$）$\Longrightarrow \sum a_n$：収束
  - ⋆ $\sqrt[n]{a_n} \longrightarrow r (n \longrightarrow \infty)$ のとき、
    $r < 1 \Longrightarrow \sum a_n$：収束,　　$r > 1 \Longrightarrow \sum a_n$：発散
- 上記の判定法で $r = 1$ の時はこれだけでは判らない。（より精密な判定法あり。）

3–4. 級数の収束・発散の例.

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ は $|x|<1$ で絶対収束 $\left(=\dfrac{1}{1-x}\right)$、$|x|\geq 1$ で発散
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ は $s>1$ で（絶対）収束、$s\leq 1$ で発散
- $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^s}$ は $s>1$ で（絶対）収束、$s\leq 1$ で発散

3–5. Landau の o-記号,O-記号.

- $f(x)=o(g(x))\ (x\longrightarrow a) \overset{\leftarrow}{\Longleftrightarrow} \dfrac{f(x)}{g(x)}\longrightarrow 0\ (x\longrightarrow a)$
  $\Longleftrightarrow \forall\varepsilon>0:\exists\delta>0:\forall x:0<|x-a|<\delta\Longrightarrow|f(x)|<\varepsilon|g(x)|$
- $f_1(x)=f_2(x)+o(g(x))\ (x\longrightarrow a) \overset{\leftarrow}{\Longleftrightarrow} f_1(x)-f_2(x)=o(g(x))$
- $f(x)=O(g(x))\ (x\longrightarrow a) \overset{\leftarrow}{\Longleftrightarrow} \dfrac{f(x)}{g(x)}$: 有界 $(x\longrightarrow a)$
  $\Longleftrightarrow \exists C>0:\exists\delta>0:\forall x:0<|x-a|<\delta\Longrightarrow|f(x)|<C|g(x)|$
- $x\longrightarrow+\infty$ 等に対しても同様。

3–6. 関数の “強さ”.

- $a<b$ に対し $x^b=o(x^a)\ (x\longrightarrow 0),\quad x^a=o(x^b)\ (x\longrightarrow+\infty)$
- $\forall a\in\boldsymbol{R},\forall\varepsilon>0$ に対し $x^a=o(e^{\varepsilon x})\ (x\longrightarrow+\infty)$
- $\forall\varepsilon>0$ に対し $\log x=o(x^{\varepsilon})\ (x\longrightarrow+\infty)$
- $\forall\varepsilon>0$ に対し $\log x=o(x^{-\varepsilon})\ (x\longrightarrow+0)$

3–7. 練習問題.

(1) 実数列 $\boldsymbol{a}=(a_n)_{n=0}^{\infty}$ について、
  (a) $\boldsymbol{a}$ が $n\longrightarrow\infty$ で或る実数 $\alpha\in\boldsymbol{R}$ に収束するならば、$\boldsymbol{a}$ は有界である。
  (b) 級数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ が収束するならば、$n\longrightarrow\infty$ で $a_n\longrightarrow 0$ である。

(2) 次の級数の収束・発散を判定せよ。
  (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^{2017}}{2^n}$　(b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}(\log n)^{2017}}$　(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$　(d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\sin n$

(3) 実数 $a\in\boldsymbol{R}$ に対し、関数 $\dfrac{x^a}{e^x}$ の $x\longrightarrow+\infty$ での極限を考える。
  (a) 任意の自然数 $N\in\boldsymbol{N}$ に対し、$x>0$ において、$e^x>1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3!}+\cdots+\dfrac{x^N}{N!}$ であることを示せ。（ヒント：帰納法と増減表）
  (b) $a\in\boldsymbol{R}$ に対し、$a<N$ となる自然数 $N\in\boldsymbol{N}$ を取ることにより、$\dfrac{x^a}{e^x}\longrightarrow 0$ $(x\longrightarrow+\infty)$ を示せ。

(4) 実数 $a\in\boldsymbol{R}$ に対し、数列 $(\dfrac{n^a}{e^n})$ の $n\longrightarrow\infty$ での極限を考える。
  (a) 充分大きな自然数 $n\in\boldsymbol{N}$ に対し（即ち、或る自然数 $N\in\boldsymbol{N}$ が存在して、$n\geq N$ なる任意の自然数 n に対し）、$x>0$ において、$\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^a<\dfrac{e}{2}$ となる（何故か？）。このことを用いて、或る定数 $C>0$ が存在して、充分大きな自然数 $n\in\boldsymbol{N}$ に対し、$\dfrac{n^a}{e^n}<C\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ であることを示せ。
  (b) これより、$\dfrac{n^a}{e^n}\longrightarrow 0\ (n\longrightarrow\infty)$ を示せ。（更に強く、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^a}{e^n}$ が収束することも判る。）

(5) 上 2 問のどちらか一方の結果を用いて、他方の結果を示してみよ。