

5. 指数関数とその仲間たち

5-1. 逆三角関数.

- 三角関数を単調な区間に制限して逆関数を考えたものを逆三角関数という。
- $y = \sin x$ ($-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$) の逆関数 $y = \arcsin x$ ($-1 \leq x \leq 1, -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$) : 主値
(しばしば $\text{Arcsin } x$ と書かれる)
- $y = \tan x$ ($-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$) の逆関数 $y = \arctan x$ ($-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$) : 主値
(しばしば $\text{Arctan } x$ と書かれる)
- 積分表示 : $\arcsin x = \int_{t=0}^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad \arctan x = \int_{t=0}^x \frac{dt}{1+t^2}$
- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$
- Taylor 展開 :
 - ★ $\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^{2n+1} = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \dots \quad (|x| < 1)$
 - ★ $\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \dots \quad (|x| < 1)$

5-2. Euler の公式.

- $e^{ix} = \cos x + i \sin x$
- $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \quad \tan x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{i(e^{ix} + e^{-ix})}$
- de Moivre の公式 : $(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$

5-3. 双曲線関数. 次で定義される関数を、総称して双曲線関数という :

- $\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$: 双曲余弦 (hyperbolic cosine)
- $\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$: 双曲正弦 (hyperbolic sine)
- $\tanh x := \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$: 双曲正接 (hyperbolic tangent)

三角関数と類似の公式が多く成立

- $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1, \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$
- $(\cosh x)' = \sinh x, (\sinh x)' = \cosh x$
- 加法定理 :
 - ★ $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$
 - ★ $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$
 - ★ $\tanh(x+y) = \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}$
- Taylor 展開 :
 - ★ $\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{720}x^6 + \dots$
 - ★ $\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{5040}x^7 + \dots$

6. 一変数関数の積分

6-1. 定積分の定義. 関数 $y = f(x)$ が有界閉区間 $[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\}$ で有界とする.

- $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$: 区間 $[a, b]$ の分割
 $I_i := [x_{i-1}, x_i]$: 各小区間 ($i = 1, \dots, n$), $|I_i| := x_i - x_{i-1}$: 区間幅
 小区間の最大幅 $\max_{1 \leq i \leq n} |I_i|$ を $|\Delta|, \delta(\Delta)$ 等と書く.

- $m_i := \inf_{x \in I_i} f(x), M_i := \sup_{x \in I_i} f(x)$: 各小区間 I_i での関数値 $f(x)$ の下限・上限

- $s_\Delta := \sum_{i=1}^n m_i |I_i|, S_\Delta := \sum_{i=1}^n M_i |I_i|$

- $s := \sup_{\Delta} s_\Delta, S := \inf_{\Delta} S_\Delta$: f の $[a, b]$ での下積分・上積分

- f が $[a, b]$ で積分可能 $\iff s = S$

この時、 $s = S =: \int_a^b f(x) dx$: f の $[a, b]$ での定積分

- (Darboux の定理) $(\Delta_n)_{n=1}^\infty$: 分割の列で、 $|\Delta_n| \rightarrow 0$ とする。この時、
 $s_{\Delta_n} \rightarrow s, S_{\Delta_n} \rightarrow S$ ($n \rightarrow \infty$)。

- 定積分の値の見当がついているときには、次を利用することも出来る :

$$\int_a^b f(x) dx = I \iff \forall \varepsilon > 0 : \exists \Delta = \Delta_\varepsilon : [a, b] \text{ の分割} : I - \varepsilon \leq s_\Delta, S_\Delta \leq I + \varepsilon$$

- 次の Riemann 和を用いて定式化することもある :

★ $\Xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$: 各小区間から代表点を 1 つずつ選んだもの ($\xi_i \in I_i$)

$$I(\Delta, \Xi) := \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) : \text{Riemann 和}$$

★ f が $[a, b]$ で積分可能 $\iff \exists \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} I(\Delta, \Xi)$ 。この時、 $\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} I(\Delta, \Xi) = \int_a^b f(x) dx$

6-2. 積分の基本性質.

- 区間に関する加法性 : $\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$

- 線型性 : $\int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx, \int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$

- 単調性 : $[a, b]$ で $f(x) \geq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$

6-3. 不定積分. 定積分関数 $\int_a^x f(t) dt$ に於いて、下端の違いによる定数の差を気にしない時、単に $\int f(x) dx$ と書く。... 不定積分

6-4. 微分積分学の基本定理. f が連続ならば、有界閉区間に於いて積分可能で、

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$$

即ち、不定積分 = 原始関数 (微分すると f になる関数)。... 微分法と積分法との邂逅 !!
 又、 F を f の原始関数 (の一つ) とすると、

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a) \left(= \left[F(x) \right]_a^b \text{ と書く} \right)$$

— 抽象的存在は反復によって具体的存在と化する。
 足立恒雄「類体論へ至る道」より