5. 指数関数とその仲間たち

5–1. **逆三角関数.**

- 三角関数を単調な区間に制限して逆関数を考えたものを**逆三角関数**という。
- $y=\sin x$ $(-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2})$ の逆関数 $y=\arcsin x$ $(-1\le x\le 1, -\frac{\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2})$ ：**主値**
  （しばしば $\mathrm{Arcsin}\ x$ と書かれる）
- $y=\tan x$ $(-\frac{\pi}{2}< x<\frac{\pi}{2})$ の逆関数 $y=\arctan x$ $(-\frac{\pi}{2}< y<\frac{\pi}{2})$ ：**主値**
  （しばしば $\mathrm{Arctan}\ x$ と書かれる）
- 積分表示：$\arcsin x=\displaystyle\int_{t=0}^{x}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$, $\quad\arctan x=\displaystyle\int_{t=0}^{x}\frac{dt}{1+t^2}$
- $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\quad(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$
- Taylor 展開：
  - ⋆ $\arcsin x=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\binom{-\frac{1}{2}}{n}x^{2n+1}=x+\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{40}x^5+\frac{5}{112}x^7+\cdots\quad(|x|<1)$
  - ⋆ $\arctan x=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7+\cdots\quad(|x|<1)$

5–2. **Euler の公式.**

- $e^{ix}=\cos x+i\sin x$
- $\cos x=\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$, $\quad\sin x=\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$, $\quad\tan x=\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{i(e^{ix}+e^{-ix})}$
- de Moivre の公式：$(\cos x+i\sin x)^n=\cos nx+i\sin nx$

5–3. **双曲線関数.** 次で定義される関数を、総称して**双曲線関数**という：

- $\cosh x:=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ ：**双曲余弦 (hyperbolic cosine)**
- $\sinh x:=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ ：**双曲正弦 (hyperbolic sine)**
- $\tanh x:=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ ：**双曲正接 (hyperbolic tangent)**

三角関数と類似の公式が多く成立

- $\cosh^2 x-\sinh^2 x=1$, $\quad\tanh x=\dfrac{\sinh x}{\cosh x}$
- $(\cosh x)'=\sinh x, (\sinh x)'=\cosh x$
- 加法定理：
  - ⋆ $\cosh(x+y)=\cosh x\cosh y+\sinh x\sinh y$
  - ⋆ $\sinh(x+y)=\sinh x\cosh y+\cosh x\sinh y$
  - ⋆ $\tanh(x+y)=\dfrac{\tanh x+\tanh y}{1+\tanh x\tanh y}$
- Taylor 展開：
  - ⋆ $\cosh x=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}x^{2n}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+\frac{1}{720}x^6+\cdots$
  - ⋆ $\sinh x=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}=x+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5+\frac{1}{5040}x^7+\cdots$